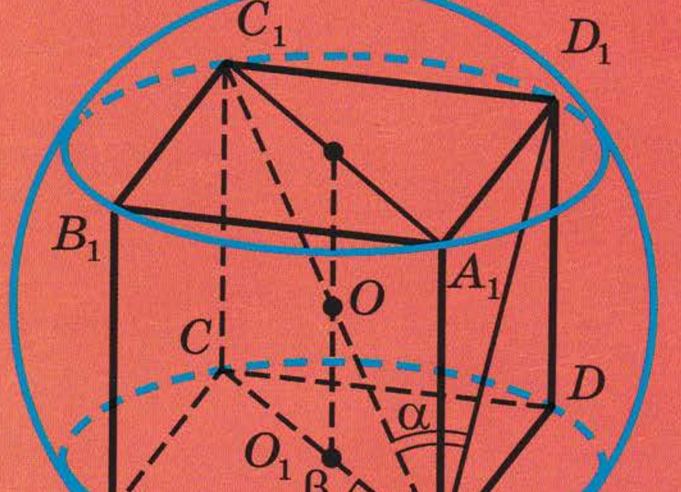
Комплексная подготовка к **ЕГЭ и ГИА**

Е.П. Нелин

Геометрия

7–11 классы

Определения, свойства, методы решения задач – в таблицах



ИЛЕКСА

ВВЕДЕНИЕ

В учебном пособии логически упорядочены и систематизированы основные и дополнительные сведения из школьного курса геометрии (планиметрия и стереометрия), которые позволяют решать самые сложные геометрические задачи, предлагаемые на выпускных и вступительных экзаменах (во время государственной итоговой аттестации или в заданиях ЕГЭ по математике).

Для эффективного использования предлагаемых таблиц по планиметрии и стереометрии следует учитывать некоторые особенности логического построения школьного курса геометрии.

Как известно, школьный курс геометрии дает представление о так называемом дедуктивном построении научной теории. Такое построение предполагает, что каждое свойство (теорема) курса геометрии должно быть доказано (выведено) путем логических рассуждений из уже известных (ранее доказанных) свойств. При этом основные свойства основных фигур (в планиметрии это точки и прямые, а в стереометрии — точки, прямые и плоскости) — аксиомы — постулируются, то есть принимаются без доказательства.

В таблицах по планиметрии и стереометрии приведены системы аксиом, принятые в учебнике геометрии А. В. Погорелова (полная их формулировка приведена в этом учебнике). Однако и при работе по другим учебникам геометрии можно использовать эти таблицы, несмотря на то что в различных учебниках одно и то же геометрическое понятие может быть определено по-разному. Например, касательную к окружности можно определить как прямую, имеющую с окружностью только одну общую точку, или как прямую, проходящую через точку окружности перпендикулярно радиусу, проведенному в эту точку. Приняв за определение одно из этих утверждений, можно доказать другое (уже не как определение, а как свойство или признак касательной). По этой причине в разных учебниках геометрии могут приводиться различные определения одного и того же понятия, однако полный набор свойств, связанных с данным понятием, которые зафиксированы в его определении, признаках и свойствах, является практически одинаковым во всех учебниках (именно этот набор свойств и выделен в данных справочных таблицах).

Работая с таблицами, следует учитывать, что наряду с терминами «аксиома» и «теорема» в курсе геометрии употребляются также термины «определение», «признак», «свойство». Соотношения между этими понятиями представлены в табл. 1.

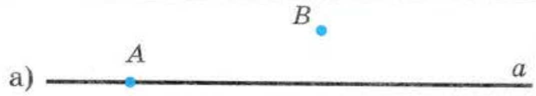
Данное пособие может быть использовано как учащимися для повторения школьного курса геометрии, так и учителями на уроке при обобщении материала той или иной темы при работе по любому учебнику геометрии для общеобразовательных учебных заведений.

Таблица 1

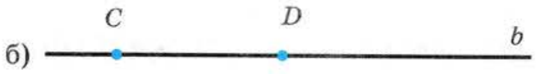
ОПРЕДЕЛЕНИЯ, ПРИЗНАКИ И СВОЙСТВА ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФИГУР И ОТНОШЕНИЙ

АКСИОМЫ ПЛАНИМЕТРИИ

1. Аксиомы принадлежности

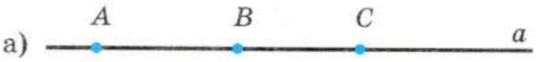
а)


$A \in a,\ B \notin a$

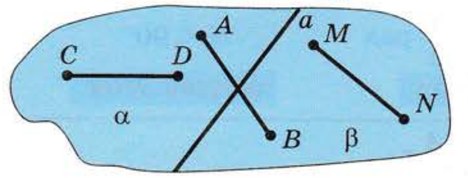
б)


Через точки C и D проходит единственная прямая b.

2. Аксиомы взаимного расположения точек на прямой и на плоскости

а)


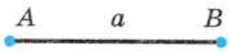
Точка B лежит между точками A и C

б)


Прямая a разбивает плоскость на две полуплоскости α и β.

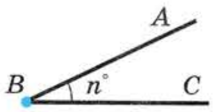
Точки A и B лежат в разных полуплоскостях; C и D (или M и N) лежат в одной полуплоскости.

3. Аксиомы измерения

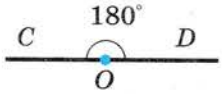


а) $AB = a > 0$

б) $AC = AB + BC$

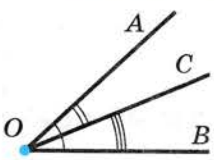


в) $\angle ABC = n° > 0°$



г) $\angle COD = 180°$

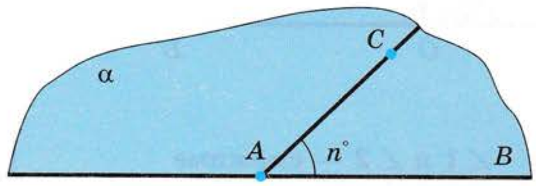
д) $\angle AOB = \angle AOC + \angle COB$



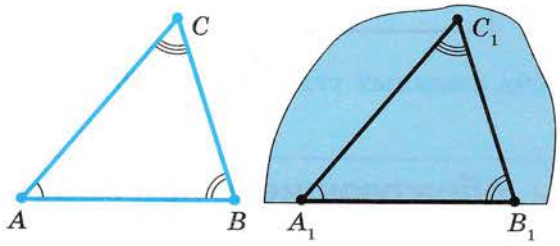
4. Аксиомы откладывания

а) отрезок $OA = m$ — единственный

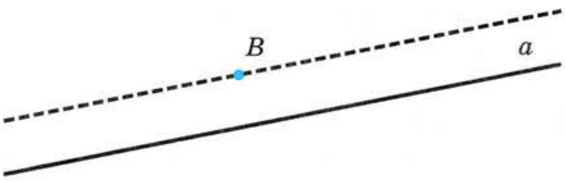
б) $\angle CAB = n°$ — единственный
$0 < n < 180$



в) $\Delta A_1B_1C_1 = \Delta ABC$

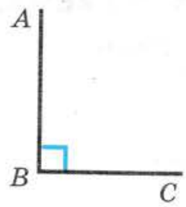


5. Аксиома параллельных



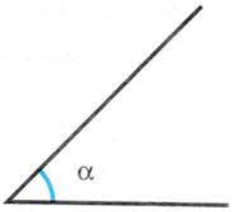
$B \notin a$.
Через точку B можно провести на плоскости не более одной прямой, параллельной данной

УГЛЫ



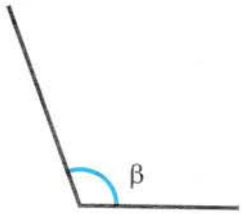
$\angle ABC = 90^\circ = \frac{\pi}{2}$ рад

прямой угол



$\alpha < 90^\circ$

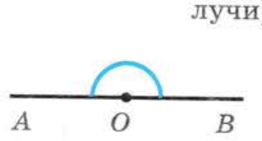
острый угол



$\beta > 90^\circ$

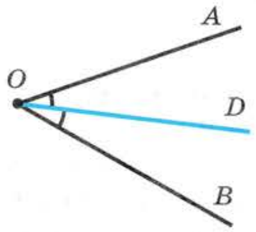
тупой угол

(стороны развернутого угла — дополняющие лучи)



$\angle AOB = 180^\circ = \pi$ рад

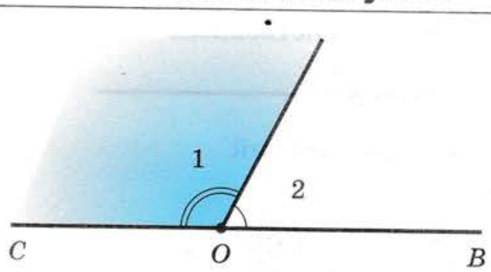
развернутый



Луч OD — биссектриса $\angle AOB$

(делит $\angle AOB$ пополам, то есть $\angle AOD = \angle BOD$)

Смежные углы

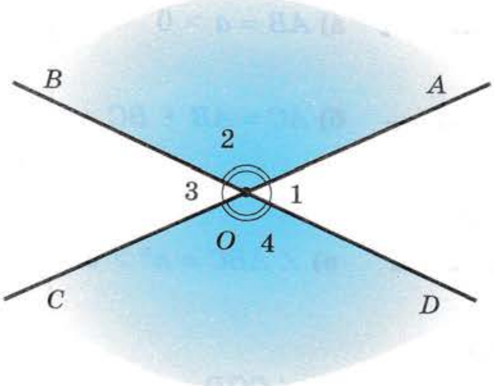


$\angle 1$ и $\angle 2$ — смежные

$$\boxed{\angle 1 + \angle 2 = 180^\circ}$$

Сумма смежных углов равна 180°

Вертикальные углы

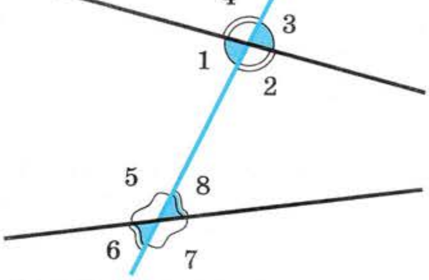


$\angle 1$ и $\angle 3$ — вертикальные
$\angle 2$ и $\angle 4$ — вертикальные

$\boxed{\angle 1 = \angle 3}$ $\boxed{\angle 2 = \angle 4}$

Вертикальные углы равны

Углы, образующиеся при пересечении двух прямых секущей



Внутренние односторонние:
$\angle 1$ и $\angle 5$; $\angle 2$ и $\angle 8$.

Внутренние накрест лежащие:
$\angle 1$ и $\angle 8$; $\angle 2$ и $\angle 5$.

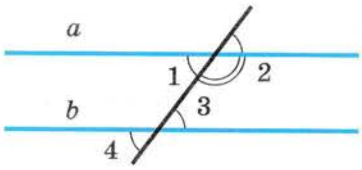
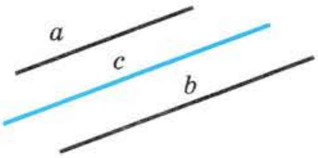
Соответственные:
$\angle 4$ и $\angle 5$; $\angle 3$ и $\angle 8$; $\angle 1$ и $\angle 6$; $\angle 2$ и $\angle 7$

ПАРАЛЛЕЛЬНЫЕ ПРЯМЫЕ

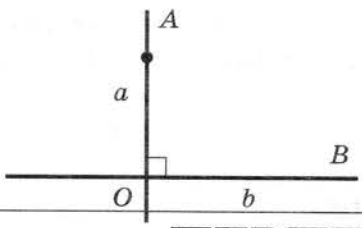
Определение Две прямые называют ***параллельными***, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

$\boxed{a \parallel b}$

Через точку вне прямой можно провести только одну прямую, параллельную данной.

	Признаки параллельности	Свойства
1. 	1. **Если** $\angle 1 = \angle 3$, или $\angle 1 = \angle 4$, или $\angle 2 + \angle 3 = 180°$, **то** $a \parallel b$.	1. **Если** $a \parallel b$, **то** $\angle 1 = \angle 3$, $\angle 1 = \angle 4$, $\angle 2 + \angle 3 = 180°$.
2. 	2. **Если** $a \perp c$, $b \perp c$ **то** $a \parallel b$.	2. **Если** $a \parallel b$, $c \perp a$, **то** $c \perp b$.
3. 	3. **Если** $a \parallel c$, $b \parallel c$, **то** $a \parallel b$. ***Две прямые, параллельные третьей прямой, параллельны друг другу***	

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНЫЕ ПРЯМЫЕ

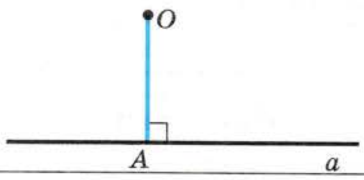


Определение. Две прямые называют ***перпендикулярными***, если они пересекаются под прямым углом.

$\boxed{a \perp b} \Leftrightarrow \boxed{\angle AOB = 90°}$

Через данную точку можно провести только одну прямую, перпендикулярную данной.

ПЕРПЕНДИКУЛЯР К ПРЯМОЙ



Определение. ***Перпендикуляром*** к данной прямой называют отрезок прямой, перпендикулярной к данной, от данной точки до точки пересечения этих прямых.

$OA \perp a$	OA — перпендикуляр к a	A — основание перпендикуляра

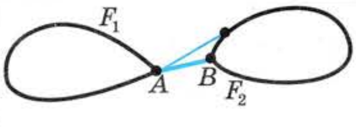
Свойства

1. Расстояние от точки до прямой измеряют по перпендикуляру.

$OA \perp a$ ($A \in a$)	OA — расстояние от точки O до прямой a

2. Перпендикуляр — кратчайшее расстояние от данной точки до точек данной прямой.

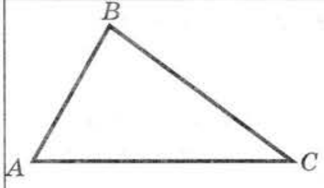
Расстояние между фигурами



Определение. За ***расстояние между фигурами*** принимают наименьшее из всех расстояний.

$\boxed{\text{Расстояние от } F_1 \text{ до } F_2 = AB}$

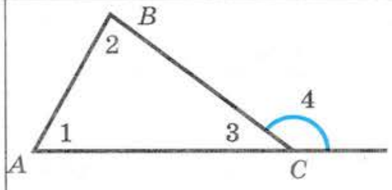
СВОЙСТВА СТОРОН И УГЛОВ ТРЕУГОЛЬНИКА



$$\angle A + \angle B + \angle C = 180°$$

Сумма углов треугольника равна 180°.

Внешний угол треугольника



Определение. Угол, смежный с внутренним углом треугольника, называют ***внешним углом треугольника*** при данной вершине.

$\angle 4$ — внешний (при вершине C)

Свойства

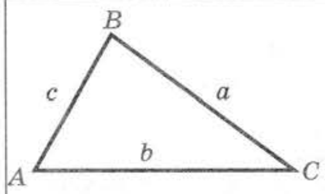
1. Внешний угол треугольника равен сумме двух внутренних углов, не смежных с ним.

$$\angle 4 = \angle 1 + \angle 2$$

2. Внешний угол треугольника больше любого внутреннего угла, не смежного с ним.

$$\angle 4 > \angle 1, \angle 4 > \angle 2$$

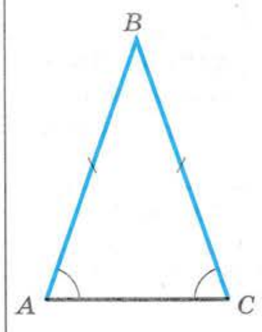
Неравенство треугольника



$$|b - c| < a < b + c$$

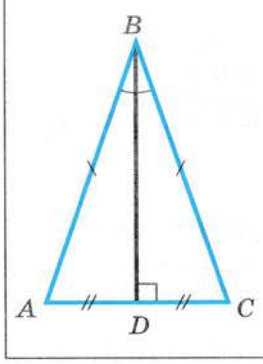
В произвольном треугольнике каждая сторона меньше суммы двух других сторон (и больше модуля разности этих сторон).

Равнобедренный треугольник



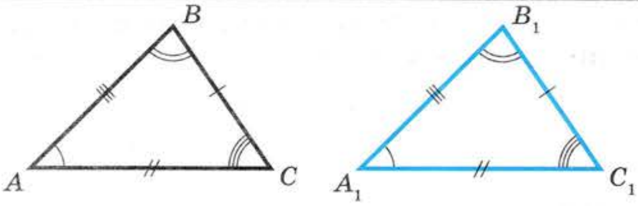
Определение. Треугольник называют ***равнобедренным***, если у него две стороны равны.

$\triangle ABC$ — равнобедренный ($AB = BC$)
AC — основание, AB и BC — боковые стороны



Свойства	Признаки
1. **Если** в $\triangle ABC$ $AB = BC$, **то** $\angle A = \angle C$.	1. **Если** в $\triangle ABC$ $\angle A = \angle C$, **то** $AB = BC$.
2. **Если** $\triangle ABC$ — равнобедренный и BD — медиана, **то BD — высота и биссектриса.**	2. **Если** в треугольнике совпадают: а) высота и медиана, или б) высота и биссектриса, или в) медиана и биссектриса, **то треугольник равнобедренный.**
В равнобедренном треугольнике высота, медиана и биссектриса, проведенные к основанию, совпадают.	

РАВЕНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКОВ



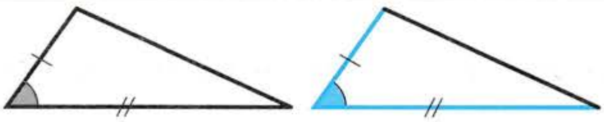
Определение. Две фигуры называют ***равными***, если они движением переводятся одна в другую.

$$\boxed{\triangle ABC = \triangle A_1B_1C_1} \Leftrightarrow \begin{array}{|c|c|} \hline AB = A_1B_1 & \angle A = \angle A_1 \\ AC = A_1C_1 & \angle B = \angle B_1 \\ BC = B_1C_1 & \angle C = \angle C_1 \\ \hline \end{array}$$

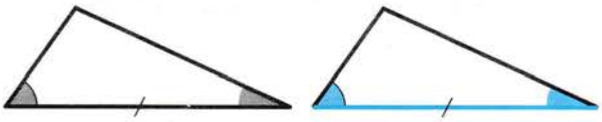
Свойства

1. У равных треугольников все соответствующие элементы равны (стороны, углы, медианы, высоты и др.)
2. У равных треугольников против равных сторон лежат равные углы, а против равных углов лежат равные стороны.

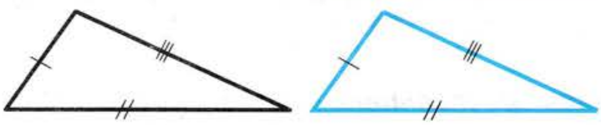
Признаки равенства треугольников



1. По двум сторонам и углу между ними.

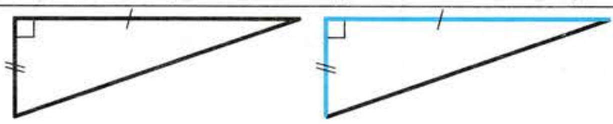


2. По стороне и двум прилегающим к ней углам.

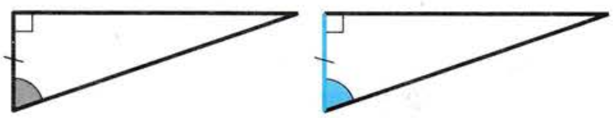


3. По трем сторонам.

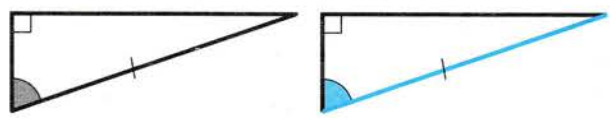
Признаки равенства прямоугольных треугольников



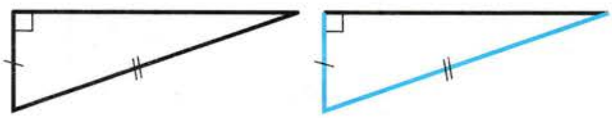
1. По двум катетам.



2. По катету и острому углу.



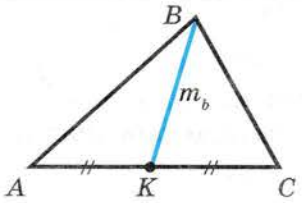
3. По гипотенузе и острому углу.



4. По гипотенузе и катету.

Таблица 7

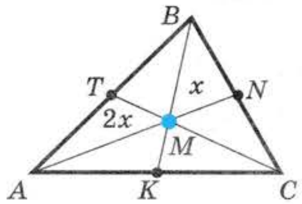
МЕДИАНА ТРЕУГОЛЬНИКА



Определение. ***Медиана треугольника*** — отрезок, соединяющий вершину треугольника с серединой противолежащей стороны.

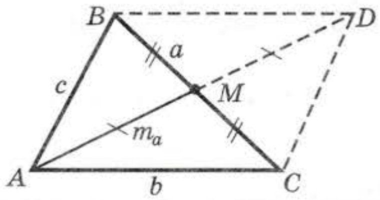
BK — медиана	K — середина AC

Свойства

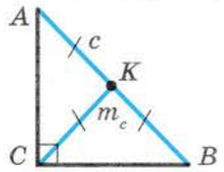


1. Все три медианы треугольника пересекаются в одной точке, которая каждую медиану делит в отношении 2:1, считая от вершины.

M — точка пересечения медиан (центр тяжести треугольника)	$\frac{AM}{MN} = \frac{BM}{MK} = \frac{CM}{MT} = \frac{2}{1}$



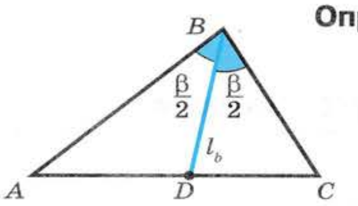
2. $\boxed{m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2b^2 + 2c^2 - a^2}}$ Если в условии геометрической задачи рассматривается медиана треугольника, то часто удобно продолжить медиану за сторону и дополнить рисунок до параллелограмма.



3. $\boxed{m_c = \frac{1}{2}c}$ В прямоугольном треугольнике медиана, проведенная к гипотенузе, равна половине гипотенузы.

Таблица 8

БИССЕКТРИСА ТРЕУГОЛЬНИКА

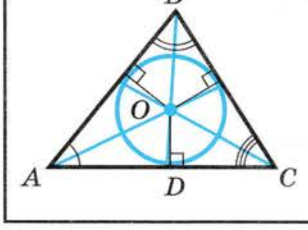


Определение. ***Биссектриса треугольника*** — отрезок биссектрисы угла треугольника, соединяющий вершину треугольника с точкой противоположной стороны.

BD — биссектриса треугольника	$\angle ABD = \angle CBD = \frac{1}{2}\angle B$

Свойства

1. $\boxed{\frac{AD}{DC} = \frac{AB}{BC}}$ Биссектриса треугольника делит противолежащую сторону на отрезки, пропорциональные прилежащим сторонам треугольника.
2. Все три биссектрисы треугольника пересекаются в одной точке, равноудаленной от трех сторон треугольника, — центре вписанной окружности.



O — точка пересечения биссектрис треугольника, центр вписанной окружности.

3.
$$\angle AOC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle B$$
$$\angle AOB = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle C$$
$$\angle BOC = 90^\circ + \frac{1}{2}\angle A$$

Таблица 9

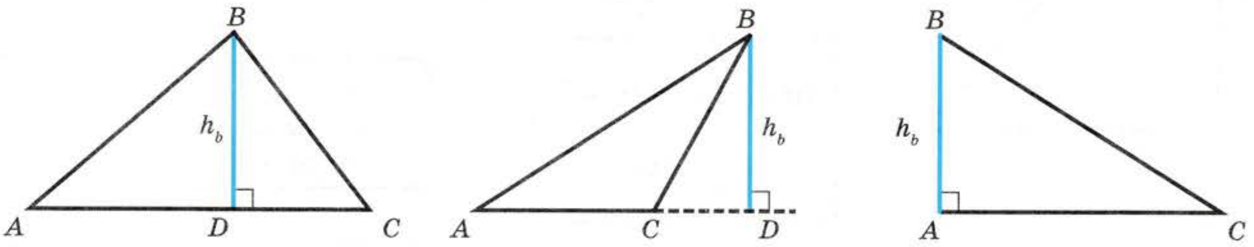
ВЫСОТА ТРЕУГОЛЬНИКА

Определение. ***Высота треугольника*** — перпендикуляр, проведенный из вершины к прямой, содержащей противолежащую сторону треугольника.

Для прямоугольного треугольника:

BD — высота	$BD \perp AC$

BA — высота ($\angle A = 90°$)

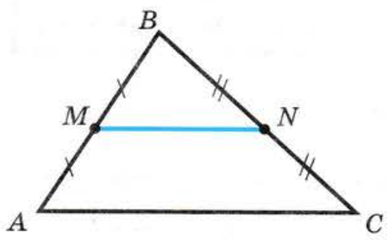


Свойства

1. Прямые, содержащие высоты треугольника, пересекаются в одной точке (ортоцентре).
2. $\boxed{h_a : h_b : h_c = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c}}$ Высоты треугольника обратно пропорциональны его сторонам. В частности, наибольшая высота треугольника проведена к его наименьшей стороне, а наименьшая сторона — к наибольшей.

Таблица 10

СРЕДНЯЯ ЛИНИЯ ТРЕУГОЛЬНИКА



Определение. ***Средней линией треугольника*** называют отрезок, соединяющий середины двух его сторон.

MN — средняя линия
M — середина AB
N — середина BC

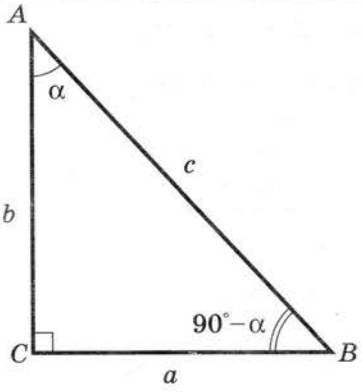
Свойства

1. $MN \parallel AC$
2. $MN = \frac{1}{2} AC$

Средняя линия треугольника параллельна одной из его сторон и равна половине этой стороны.

Таблица 11

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ЭЛЕМЕНТАМИ ПРЯМОУГОЛЬНОГО ТРЕУГОЛЬНИКА



$\angle C = 90^\circ$; a, b — катеты, c — гипотенуза; $\angle A = \alpha$

$a^2 + b^2 = c^2$ — **теорема Пифагора**

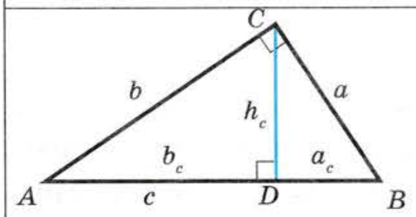
$\angle B = 90^\circ - \alpha$

$c > a,\ c > b$

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$; $\cos\alpha = \frac{b}{c}$;

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$; $\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$

$a = c \cdot \sin\alpha$
$b = c \cdot \cos\alpha$
$a = b \cdot \operatorname{tg}\alpha$



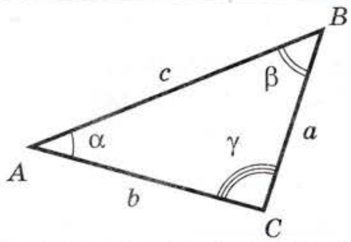
CD — высота

$h_c^2 = a_c \cdot b_c$
$a^2 = c \cdot a_c$
$b^2 = c \cdot b_c$

$\triangle ACD \sim \triangle ABC$
$\triangle CBD \sim \triangle ABC$
$\triangle ACD \sim \triangle CBD$

Таблица 12

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ СТОРОНАМИ И УГЛАМИ В ПРОИЗВОЛЬНОМ ТРЕУГОЛЬНИКЕ



Теорема синусов

$$\frac{a}{\sin\alpha} = \frac{b}{\sin\beta} = \frac{c}{\sin\gamma} = 2R$$

R — радиус описанной окружности

Теорема косинусов

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\gamma$$

Следствия

1. Если $\boldsymbol{c^2 = a^2 + b^2}$, то $\gamma = \mathbf{90^\circ}$, то есть треугольник прямоугольный (теорема, обратная теореме Пифагора).
2. **Если $c^2 < a^2 + b^2$, то угол γ — острый ($\cos\gamma > 0$); если c — наибольшая сторона, то треугольник — остроугольный.**
3. **Если $c^2 > a^2 + b^2$, то угол γ — тупой ($\cos\gamma < 0$).**
4. **В треугольнике против большей стороны лежит больший угол, против большего угла лежит большая сторона: $a > b \Leftrightarrow \alpha > \beta$.**

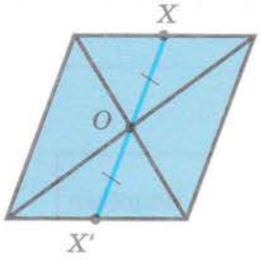
ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ФИГУР. ДВИЖЕНИЕ

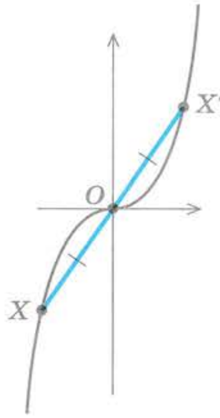
Определение. *Движение* — это преобразование, при котором сохраняются расстояния между точками фигуры.

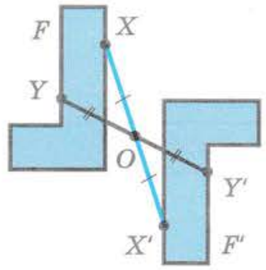
$X'Y' = XY$

Во время движения сохраняются углы между лучами.

Симметрия относительно точки

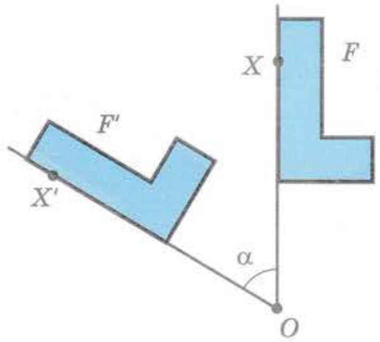






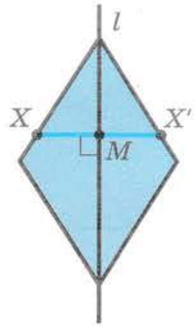
$OX' = OX$

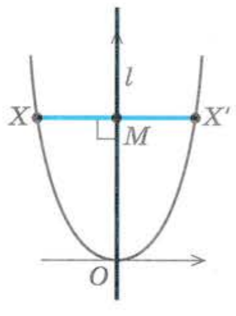
Поворот

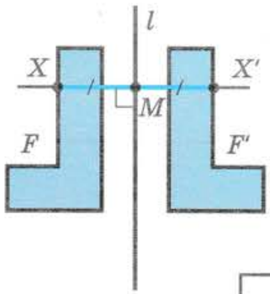


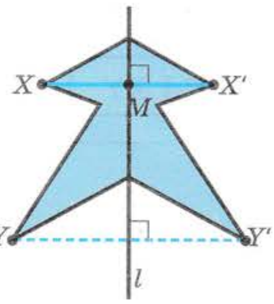
$OX' = OX$ | $\angle XOX' = \alpha$

Симметрия относительно прямой





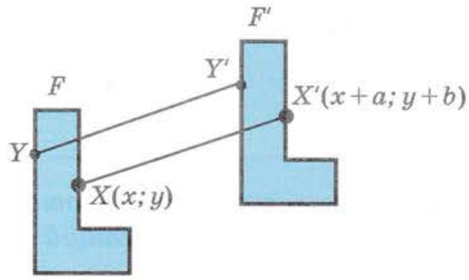




$XX' \perp l$

$XM = MX'$

Параллельный перенос



Точки смещаются по параллельным прямым (или совпадающим прямым) на одно и то же расстояние в одном и том же направлении.

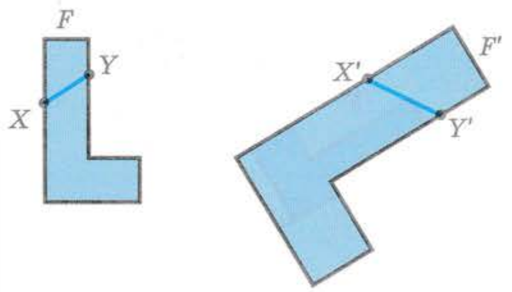
$XX' = YY'$

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ПОДОБИЯ

Определение. Преобразование, при котором расстояния между точками изменяются в одно и то же число раз, называют ***преобразованием подобия.***

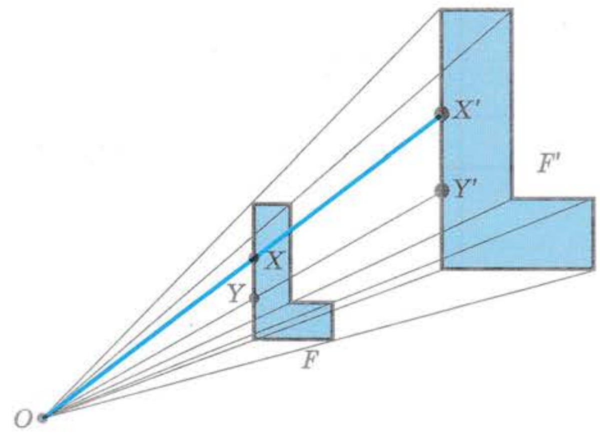
Свойства

1. Преобразование подобия сохраняет углы между лучами.
2. **У подобных фигур соответствующие углы равны, а соответствующие отрезки — пропорциональны.**



$$\frac{X'Y'}{XY} = K$$ — коэффициент подобия

Гомотетия



Если точка X отображается в точку X', то это означает:

1) точка X' лежит на луче OX;

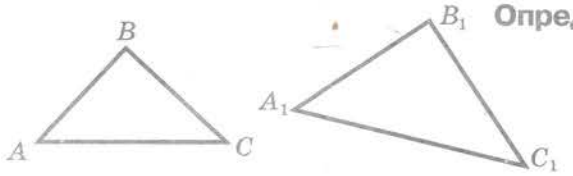
2) $$\frac{OX'}{OX} = K$$

Свойство

При гомотетии отрезок отображается в параллельный ему отрезок (или в отрезок, лежащий с данным отрезком на одной прямой).

$$X'Y' \parallel XY$$

ПОДОБИЕ ТРЕУГОЛЬНИКОВ



Определение. Два треугольника называют ***подобными***, если они переводятся друг в друга с помощью преобразования подобия.

$\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$

Свойства

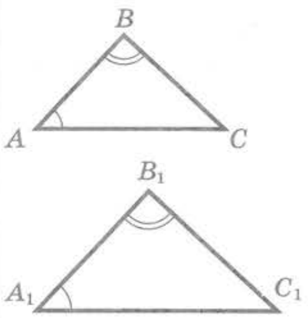
1. У подобных треугольников соответствующие углы равны, а соответствующие отрезки пропорциональны.

$\angle A = \angle A_1;\ \angle B = \angle B_1;\ \angle C = \angle C_1$	$\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1} = \dfrac{h}{h_1} = \dfrac{R}{R_1} = \ldots = K$

2. $\dfrac{P}{P_1} = \dfrac{AB}{A_1B_1} = K$ Отношение периметров подобных треугольников равно отношению соответствующих сторон и равно коэффициенту подобия.

3. $\dfrac{S_{\triangle ABC}}{S_{\triangle A_1B_1C_1}} = \left(\dfrac{AB}{A_1B_1}\right)^2 = K^2$ Отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

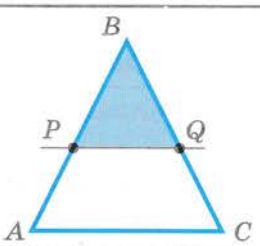
Признаки подобия треугольников



1. **Если** $\angle A = \angle A_1$, $\angle B = \angle B_1$, **то** $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$ — по двум равным углам.

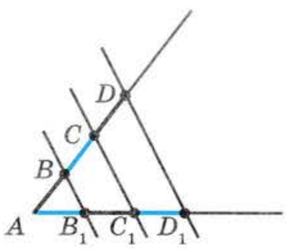
2. **Если** $\angle A = \angle A_1$, $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$, **то** $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$ — по двум пропорциональным сторонам и углу между ними.

3. **Если** $\dfrac{AB}{A_1B_1} = \dfrac{BC}{B_1C_1} = \dfrac{AC}{A_1C_1}$, **то** $\triangle ABC \backsim \triangle A_1B_1C_1$ — по трем пропорциональным сторонам.



Если $PQ \parallel AC$, **то** $\triangle PBQ \backsim \triangle ABC$

Прямая, параллельная стороне треугольника, отсекает от него треугольник, подобный данному.



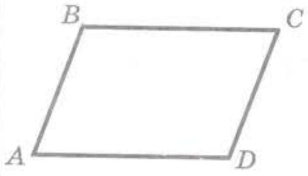
Если $BB_1 \parallel CC_1 \parallel DD_1$, **то** $AB : BC : CD = AB_1 : B_1C_1 : C_1D_1$

Параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на сторонах угла пропорциональные отрезки.

В частности, **если** $AB = BC = CD$, **то** $AB_1 = B_1C_1 = C_1D_1$ — **теорема Фалеса.**

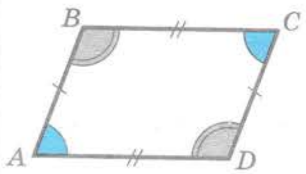
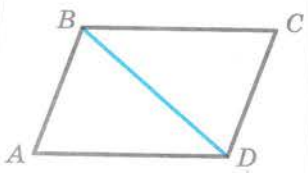
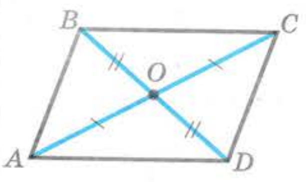
Если параллельные прямые, пересекающие стороны угла, отсекают на одной его стороне равные отрезки, то они отсекают равные отрезки и на другой его стороне.

ПАРАЛЛЕЛОГРАММ И ЕГО ВИДЫ

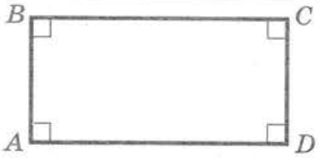


Определение. Четырехугольник, у которого противолежащие стороны попарно параллельны, называют ***параллелограммом.***

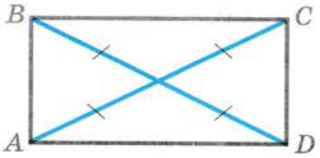
$ABCD$ — параллелограмм $\Leftrightarrow$ $AB \parallel CD$, $BC \parallel AD$

	Свойства	Признаки
	1. **Если** $ABCD$ — параллелограмм, **то** $AB = DC$; $AD = BC$; $\angle A = \angle C$; $\angle B = \angle D$. *У параллелограмма противолежащие стороны равны, противолежащие углы равны.*	1. **Если** $ABCD$ — четырехугольник и $BC \parallel AD$, $BC = AD$, **то** $ABCD$ — **параллелограмм.** *Если в четырехугольнике две стороны параллельны и равны, то он — параллелограмм.* 2. **Если** $ABCD$ — четырехугольник и $AB = DC$, $AD = BC$, **то** $ABCD$ — **параллелограмм.** *Если в четырехугольнике противолежащие стороны попарно равны, то он — параллелограмм.*
	2. **Если** $ABCD$ — параллелограмм и BD — диагональ, **то** $\triangle ABD = \triangle CDB$. *Диагональ делит параллелограмм на два равных треугольника.*	
	3. **Если** $ABCD$ — параллелограмм, AC и BD — диагонали, **то** $AO = OC$; $BO = OD$. *Диагонали параллелограмма точкой пересечения делятся пополам.*	3. **Если** $ABCD$ — четырехугольник и $AO = OC$, $BO = OD$, **то** $ABCD$ — **параллелограмм.** *Если диагонали четырехугольника в точке пересечения делятся пополам, то этот четырехугольник — параллелограмм.*
	4. $\boxed{AC^2 + BD^2 = 2\,(AD^2 + AB^2)}$ *Сумма квадратов диагоналей параллелограмма равна сумме квадратов всех его сторон.*	

Прямоугольник

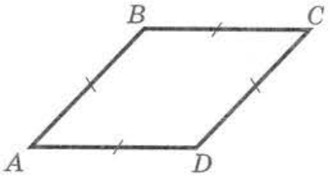


Определение. Параллелограмм, у которого все углы прямые, называют ***прямоугольником.***

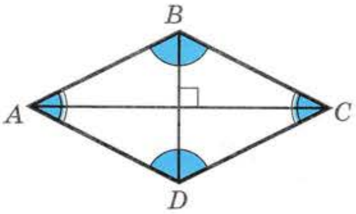


Свойства	Признаки
1. Все свойства параллелограмма. 2. **Если** $ABCD$ — прямоугольник, **то** $AC = BD$ (диагонали прямоугольника равны).	1. **Если** $ABCD$ — параллелограмм и $\angle A = 90°$, **то** $ABCD$ **— прямоугольник.** 2. **Если** $ABCD$ — параллелограмм и $AC = BD$, **то** $ABCD$ **— прямоугольник.**

Ромб

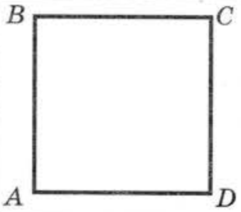


Определение. Параллелограмм, у которого все стороны равны, называют ***ромбом***.



Свойства	Признаки
1. Все свойства параллелограмма. 2. **Если** $ABCD$ — ромб, AC и BD — диагонали, **то**: **а)** $AC \perp BD$ — *диагонали перпендикулярны*; **б) диагонали являются биссектрисами углов ромба.**	1. **Если** $ABCD$ — четырехугольник и $AB = AD = BC = CD$, **то** $ABCD$ **— ромб.** *Если у четырехугольника все стороны равны, то он — ромб.*

Квадрат

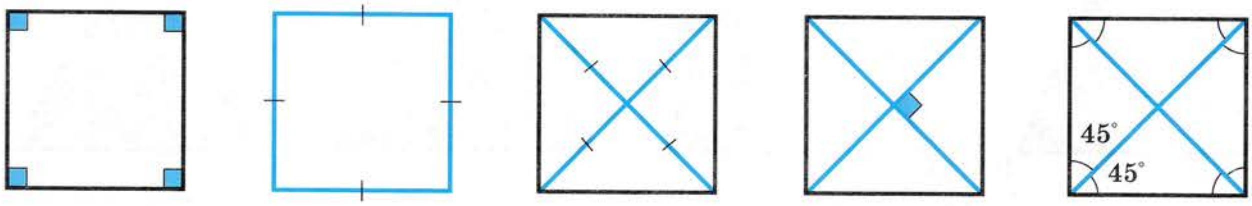


Определение. Прямоугольник, у которого все стороны равны, называют ***квадратом***.

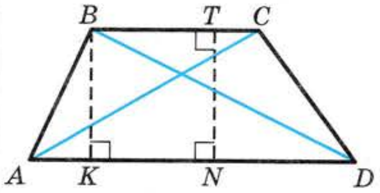
Эквивалентное определение. Ромб, у которого все углы прямые, называют ***квадратом***.

Свойства

Все свойства прямоугольника и ромба.



ТРАПЕЦИЯ

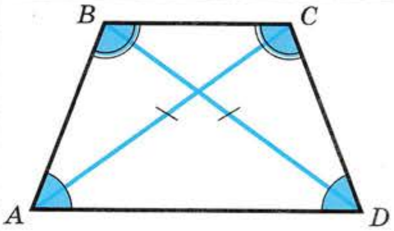


Определение. Четырехугольник, у которого две стороны параллельны, а две другие стороны не параллельны, называют ***трапецией***.

$BC \parallel AD$

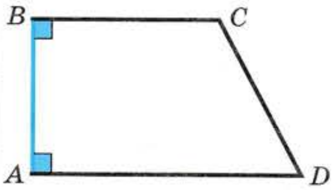
ABCD — трапеция, *AD* и *BC* — основания, *AB* и *CD* — боковые стороны, *AC* и *BD* — диагонали, *BK* и *TN* — высоты.

Частные случаи трапеции



Равнобокая, или равнобедренная, трапеция — трапеция с равными боковыми сторонами ($AB = CD$).

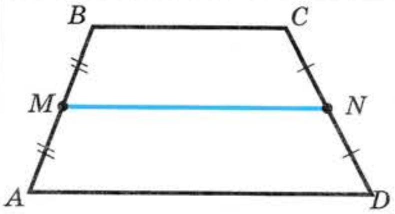
Свойства		Признак
$\angle A = \angle D$	Углы при основании равны.	Если *ABCD* — трапеция и $\angle A = \angle D$ или $AC = BD$, то $AB = CD$
$AC = BD$	Диагонали равны.	



Прямоугольная трапеция — трапеция, у которой одна боковая сторона перпендикулярна основаниям.

$h_{\text{прямоуг. трапеции}} = AB$

Средняя линия трапеции



Определение. Отрезок, соединяющий середины боковых сторон трапеции, называют ***средней линией трапеции.***

MN — средняя линия

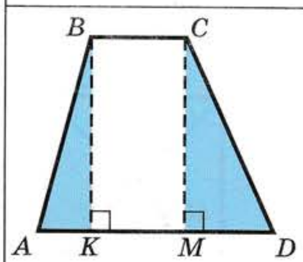
Свойства

$MN \parallel AD$
$MN \parallel BC$

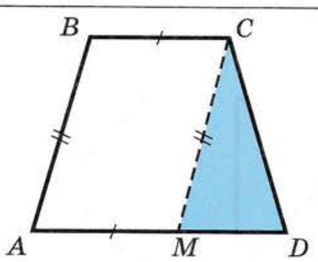
$MN = \dfrac{AD + BC}{2}$

Средняя линия трапеции параллельна основаниям и равна их полусумме.

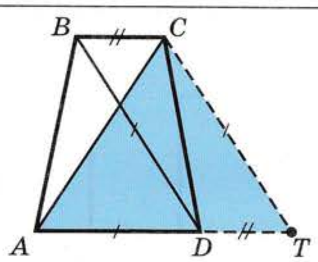
Типичные дополнительные построения для трапеции
(изображены штриховыми линиями)



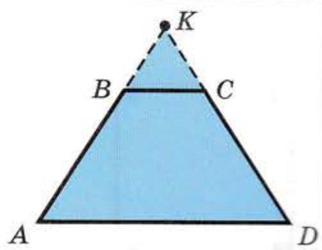
$BK \perp AD$
$CM \perp AD$



$CM \parallel BA$

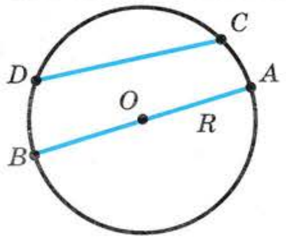


$CT \parallel BD$



AB и *DC* продолжить до пересечения

ОКРУЖНОСТЬ, ХОРДЫ И ДУГИ



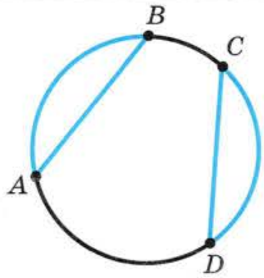
Определение. ***Окружность*** — фигура, состоящая из всех точек плоскости, равноудаленных от данной точки (центра).

O — центр окружности; OA — радиус; AB — диаметр.

CD — хорда (отрезок, соединяющий две точки окружности).

Наибольшая хорда — диаметр

Свойства



Если $\cup AB = \cup CD$,

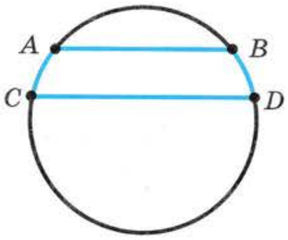
то $\boldsymbol{AB = CD}$

(равные дуги стягивают равные хорды).

Если $AB = CD$,

то $\boldsymbol{\cup AB = \cup CD}$

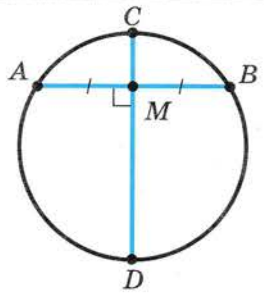
(равные хорды стягивают равные дуги).



Если $AB \parallel CD$,

то $\boldsymbol{\cup AB = \cup BD}$

(параллельные хорды отсекают на окружности равные дуги).



Если CD — диаметр, AB — хорда,

$CD \perp AB$,

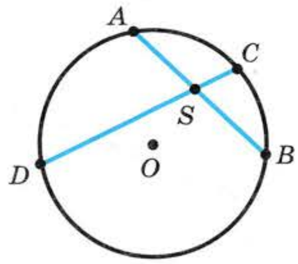
то $\boldsymbol{AM = MB}$

(и $\cup AC = \cup CB$).

$AM = MB$,

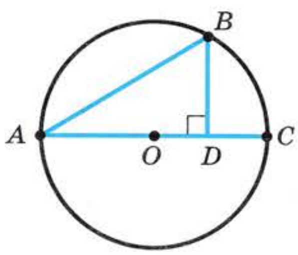
то $\boldsymbol{CD \perp AB}$.

Диаметр, перпендикулярный к хорде, делит эту хорду (и дуги, которые она стягивает) пополам, и наоборот.



$\boxed{AS \cdot SB = CS \cdot SD}$,

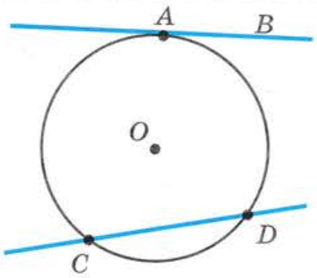
где S — точка пересечения хорд AB и CD



Если AB — хорда, AC — диаметр, $BD \perp AC$,

то $\boxed{\begin{array}{c} \boldsymbol{AB^2 = AD \cdot AC} \\ \boldsymbol{BD^2 = AD \cdot DC} \end{array}}$

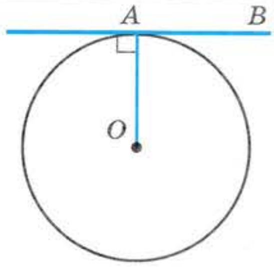
ОКРУЖНОСТЬ. КАСАТЕЛЬНЫЕ И СЕКУЩИЕ



Определение. Прямую, имеющую с окружностью только одну общую точку, называют ***касательной к окружности***.

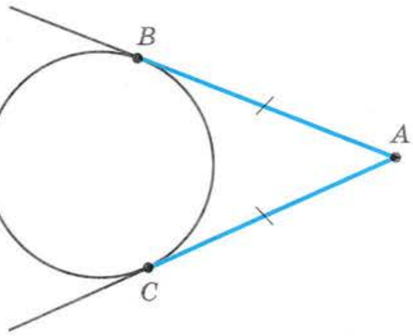
AB — **касательная;** A — точка касания;
CD — **секущая** (прямая, имеющая с окружностью две общие точки).

Свойства



$OA \perp AB$

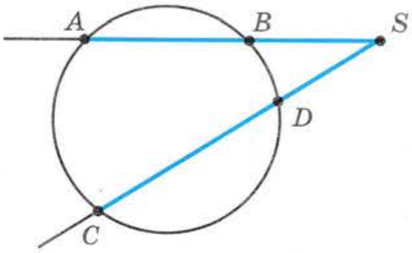
Касательная перпендикулярна к радиусу, проведенному в точку касания.



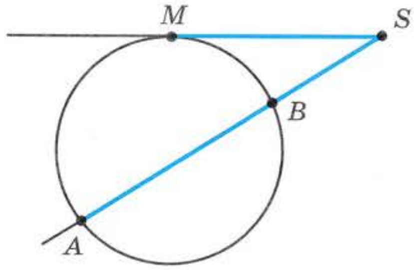
$AB = AC$

(B и C — точки касания)

Если из одной точки к одной окружности проведены две касательные, то отрезки касательных равны между собой.

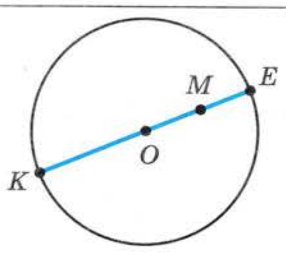


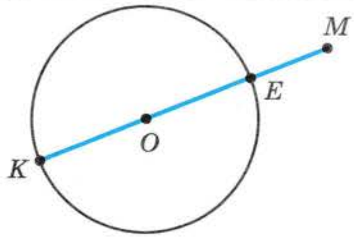
$SA \cdot SB = SC \cdot SD$



$SA \cdot SB = SM^2$,

где SM — касательная, M — точка касания





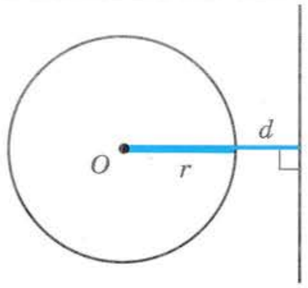
Наибольшее и наименьшее расстояния от данной точки до точек окружности измеряются по прямой, проходящей через данную точку и центр окружности.

ME — наименьшее расстояние от точки M до точек окружности;

MK — наибольшее расстояние от точки M до точек окружности

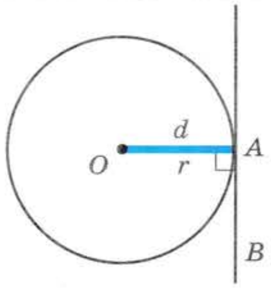
ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ПРЯМОЙ И ОКРУЖНОСТИ

Пусть d — расстояние от центра окружности до прямой, r — радиус окружности.



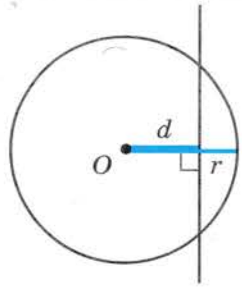
$\boxed{d > r}$

Общих точек нет.



$\boxed{d = r}$

Одна общая точка (прямая AB — касательная).



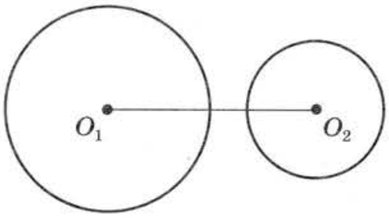
$\boxed{d < r}$

Две общие точки.

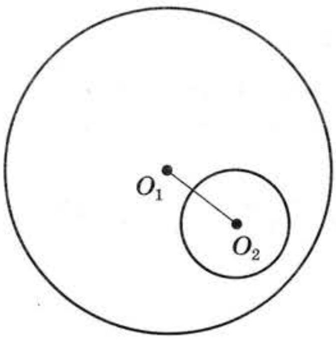
ВЗАИМНОЕ РАСПОЛОЖЕНИЕ ДВУХ ОКРУЖНОСТЕЙ

Пусть $O_1O_2 = d$ — расстояние между центрами окружностей, r_1 и r_2 — радиусы окружностей $(r_1 > r_2)$.

Общих точек нет

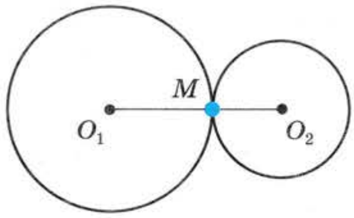


$\boxed{d > r_1 + r_2}$

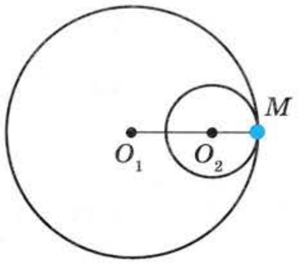


$\boxed{0 < d < r_1 - r_2}$

Одна общая точка (окружности касаются в этой точке)



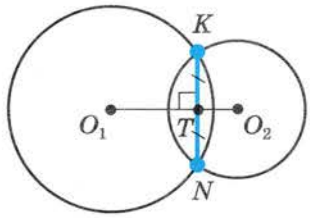
$\boxed{d = r_1 + r_2}$ — внешнее касание



$\boxed{d = r_1 - r_2}$ — внутреннее касание

$M \in O_1O_2$ — точка касания лежит на прямой, проходящей через центры окружностей.

Две общие точки (окружности пересекаются)

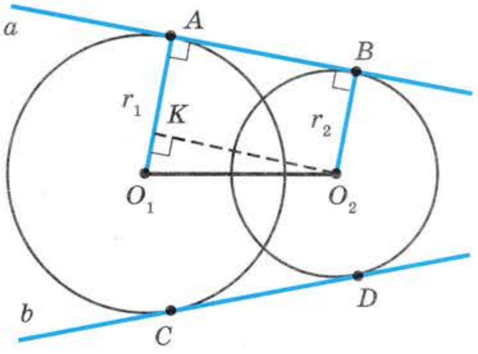


$\boxed{r_1 - r_2 < d < r_1 + r_2}$

$KN \perp O_1O_2$
$KT = TN$

ОБЩИЕ КАСАТЕЛЬНЫЕ ДВУХ ОКРУЖНОСТЕЙ

1. Окружности пересекаются ($|r_1 - r_2| < O_1O_2 < r_1 + r_2$)



Две общие касательные a и b

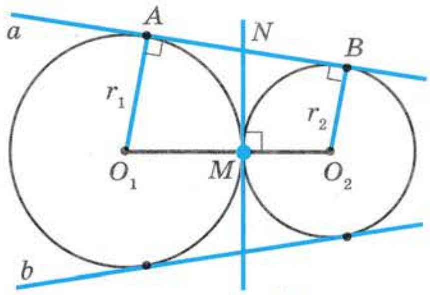
$AB = CD$

Если $r_1 = r_2$, то $a \parallel b$

Если $r_1 \neq r_2$, то a и b пересекаются на прямой O_1O_2

Типичное дополнительное построение: $O_2K \perp O_1A$

2. Окружности касаются (M — точка касания)



Если $r_1 = r_2$, то $a \parallel b$

Если $r_1 \neq r_2$, то a и b пересекаются на прямой O_1O_2

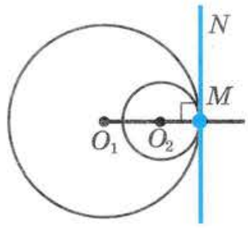
Внешнее касание ($O_1O_2 = r_1 + r_2$)

Три общие касательные: MN; a; b

$MN \perp O_1O_2$

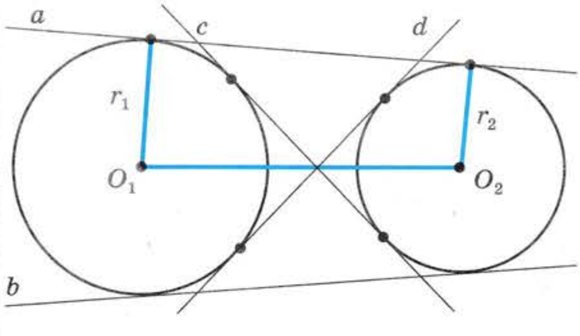
Внутреннее касание ($O_1O_2 = |r_1 - r_2|$)

Одна общая касательная — MN



$MN \perp O_1O_2$

3. Одна окружность лежит вне другой ($O_1O_2 > r_1 + r_2$)



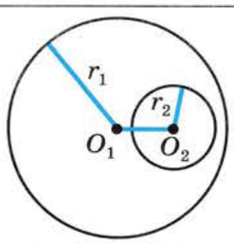
Четыре общие касательные: a; b; c; d

c и d пересекаются на отрезке O_1O_2

Если $r_1 = r_2$, то $a \parallel b$

Если $r_1 \neq r_2$, то a и b пересекаются на прямой O_1O_2

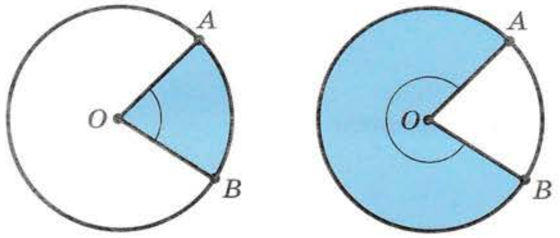
4. Одна окружность лежит внутри другой ($O_1O_2 < |r_1 - r_2|$)



Общих касательных нет

Таблица 22

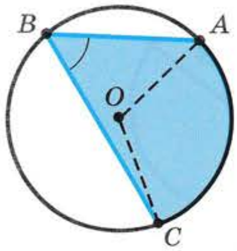
УГЛЫ В ОКРУЖНОСТИ



$\angle AOB$ — центральный угол

$\angle AOB = \cup AB$

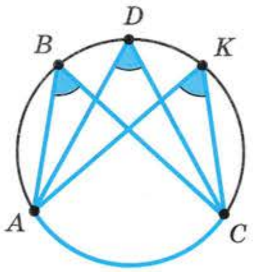
Центральный угол измеряется дугой, на которую он опирается.



$\angle ABC$ — вписанный угол

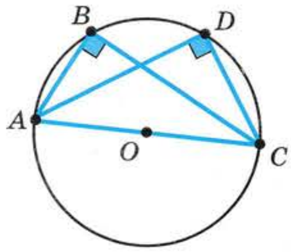
$\angle ABC = \frac{1}{2} \cup AC = \frac{1}{2} \angle AOC$

Вписанный угол измеряется половиной дуги, на которую он опирается, и равен половине центрального угла, опирающегося на ту же дугу.



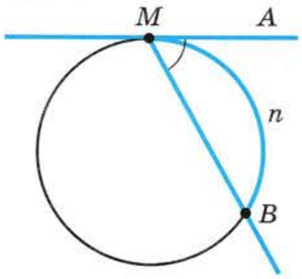
$\angle ABC = \angle ADC = \angle AKC$

Вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу, равны между собой.



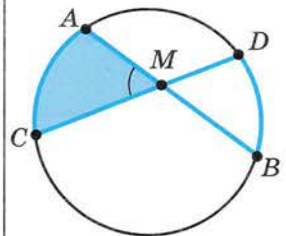
$\angle ABC = \angle ADC = 90°$

Вписанный угол, опирающийся на диаметр, равен 90°.



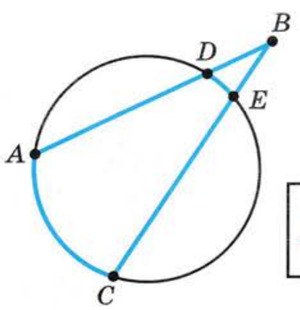
MA — касательная, MB — секущая.

$\angle AMB = \frac{1}{2} \cup MnB$



AB и CD — хорды

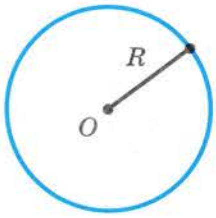
$\angle AMC = \frac{1}{2}(\cup AC + \cup DB)$



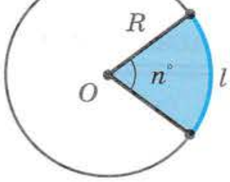
BA и BC — секущие

$\angle ABC = \frac{1}{2}(\cup AC - \cup DE)$

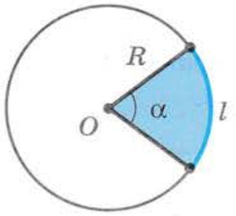
ДЛИНА ОКРУЖНОСТИ И ЕЕ ЧАСТЕЙ



$\boxed{C = 2\pi R}$ — длина **окружности**

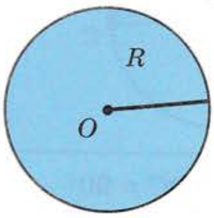


$\boxed{l = \frac{2\pi R}{360^\circ} \cdot n^\circ = \frac{\pi R n}{180}}$ — длина **дуги**, соответствующей центральному углу в n градусов

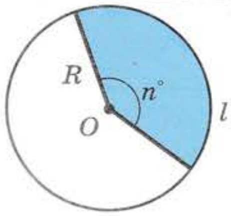


$\boxed{l = \frac{2\pi R}{2\pi} \cdot \alpha = R\alpha}$ — длина **дуги**, соответствующей центральному углу в α радиан

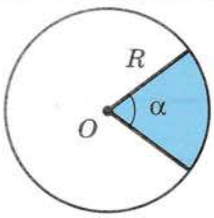
ПЛОЩАДЬ КРУГА И ЕГО ЧАСТЕЙ



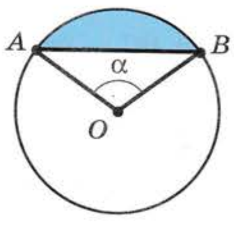
$\boxed{S = \pi R^2}$ — площадь **круга**

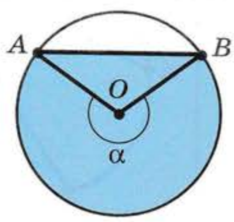


$\boxed{S = \frac{\pi R^2}{360} \cdot n}$ — площадь **кругового сектора**, соответствующего центральному углу в n градусов



$\boxed{S = \frac{\pi R^2}{2\pi} \cdot \alpha = \frac{R^2\alpha}{2}}$ — площадь **кругового сектора**, соответствующего центральному углу в α радиан



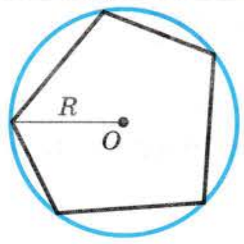


круговой сегмент

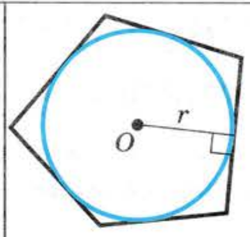
$$\boxed{S_{\text{кругового сегмента}} = S_{\text{кругового сектора}} \mp S_{\Delta AOB}}$$

(при $\alpha < 180^\circ$ знак «−»,
при $\alpha > 180^\circ$ знак «+»)

ВПИСАННЫЙ И ОПИСАННЫЙ МНОГОУГОЛЬНИКИ
(описанная и вписанная окружности)



Вписанный многоугольник — все вершины лежат на окружности.

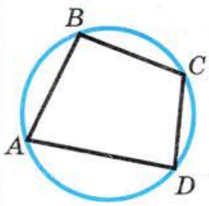


Описанный многоугольник — все стороны являются касательными к окружности.

$$\boxed{S_{\text{опис}} = \frac{P \cdot r}{2}},$$

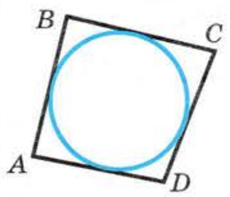
где P — периметр,
r — радиус вписанной окружности.
O — точка пересечения биссектрис внутренних углов.

ВПИСАННЫЙ И ОПИСАННЫЙ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКИ



$$\boxed{\angle A + \angle C = 180^\circ, \quad \angle B + \angle D = 180^\circ}$$

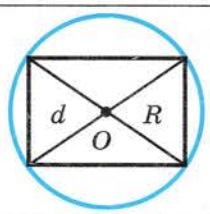
И наоборот: если у четырехугольника сумма противолежащих углов равна 180°, то около него можно описать окружность.



$AB + CD = BC + AD$
(суммы длин противолежащих сторон равны)

И наоборот: если у выпуклого четырехугольника суммы длин противолежащих сторон равны, то в него можно вписать окружность.

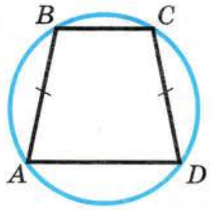
ПРЯМОУГОЛЬНИК



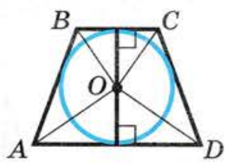
$$\boxed{R = \frac{1}{2}d}$$

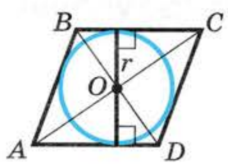
1. Если параллелограмм вписан в окружность, то он — прямоугольник.
2. Центр окружности, описанной около прямоугольника, — точка пересечения его диагоналей.

ТРАПЕЦИЯ И РОМБ



Если $ABCD$ — вписанная трапеция,
то $AB = CD$



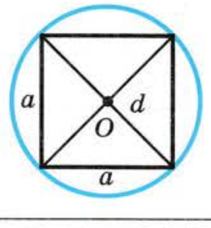


$$\boxed{d_{\text{впис. окр}} = h}$$

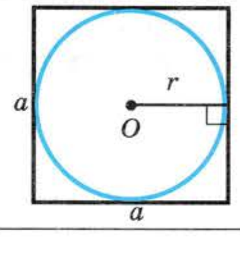
O — точка пересечения биссектрис внутренних углов.

$$\boxed{\angle AOB = \angle COD = 90^\circ}$$

КВАДРАТ



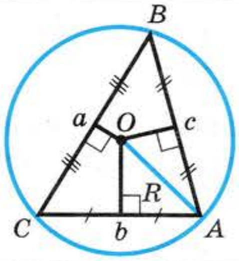
$$\boxed{R_{\text{опис}} = \frac{1}{2}d = \frac{a\sqrt{2}}{2}}$$



$$\boxed{r_{\text{впис}} = \frac{1}{2}a}$$

ОКРУЖНОСТЬ, ОПИСАННАЯ ОКОЛО ТРЕУГОЛЬНИКА, И ОКРУЖНОСТЬ, ВПИСАННАЯ В ТРЕУГОЛЬНИК

Описанная окружность



O — точка пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника;

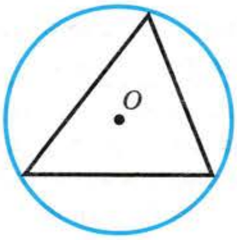
$OA = OB = OC = R$

$$\boxed{R = \frac{a}{2\sin A}}$$

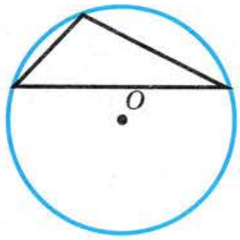
$$\boxed{R = \frac{abc}{4S}}$$

Положение центра описанной окружности

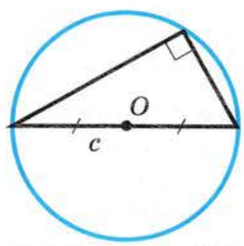
остроугольный треугольник



тупоугольный треугольник



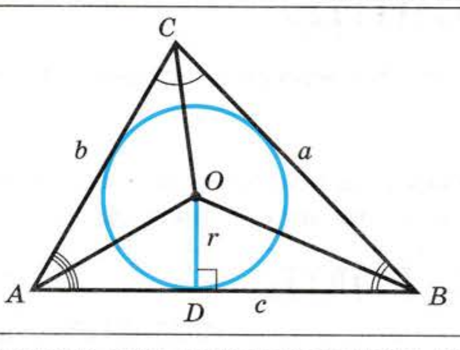
прямоугольный треугольник



O — середина гипотенузы

$$\boxed{R = \frac{c}{2}}$$

Вписанная окружность

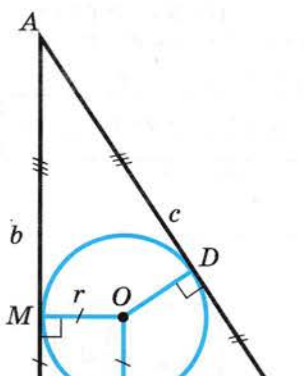


O — точка пересечения биссектрис внутренних углов треугольника;

$OD = r$; $OD \perp AB$

$$\boxed{r = \frac{2S_{\Delta ABC}}{a+b+c}}$$

В прямоугольном треугольнике

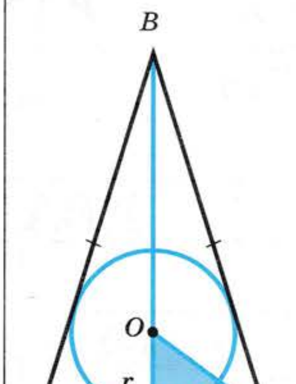


$$\boxed{r = \frac{a+b-c}{2}}$$

$OK = OM = OD = r$

($OKCM$ — квадрат)

В равнобедренном треугольнике



$AB = DC$;

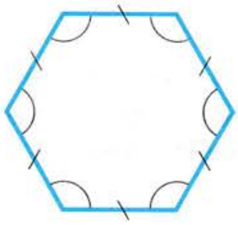
BD — высота, медиана и биссектриса;

AO — биссектриса угла A

$$\boxed{OD = r}$$

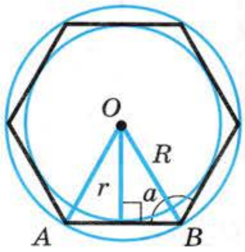
Таблица 26

ОКРУЖНОСТИ, ОПИСАННЫЕ И ВПИСАННЫЕ В ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОУГОЛЬНИКИ



Определение. Выпуклый многоугольник называют ***правильным***, если у него все стороны и все углы равны.

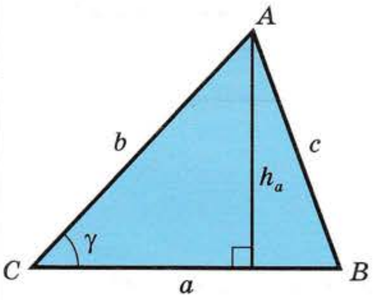
Связь между стороной правильного n-угольника и радиусами описанной и вписанной окружностей



	n	$n=3$	$n=4$	$n=6$
R	$\dfrac{a_n}{2\sin\dfrac{180^\circ}{n}}$	$\dfrac{a}{\sqrt{3}}$	$\dfrac{a}{\sqrt{2}}$	a
r	$\dfrac{a_n}{2\,\mathrm{tg}\dfrac{180^\circ}{n}}$	$\dfrac{a}{2\sqrt{3}}$	$\dfrac{a}{2}$	$\dfrac{a\sqrt{3}}{2}$

Таблица 27

ПЛОЩАДИ ТРЕУГОЛЬНИКОВ



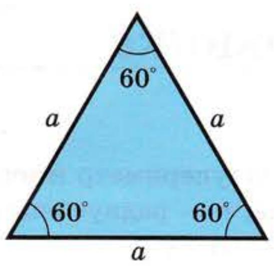
$\boxed{S=\frac{1}{2}a\cdot h_c}$ $\boxed{S=\frac{1}{2}ab\sin\gamma}$

$\boxed{S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$ — формула Герона $\left(p=\dfrac{a+b+c}{2}\right)$.

$\boxed{S=\dfrac{abc}{4R}}$, где R — радиус описанной окружности

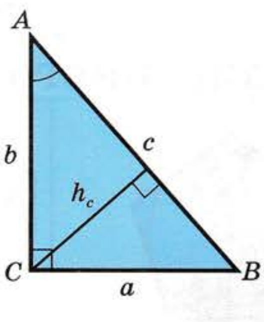
$\boxed{S=r\cdot p}$, где r — радиус вписанной окружности

Правильный треугольник



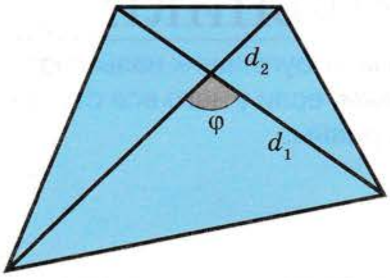
$\boxed{S=\dfrac{a^2\sqrt{3}}{4}}$

Прямоугольный треугольник



$S=\frac{1}{2}ab$
$S=\frac{1}{2}c\cdot h_c$
$S=\frac{1}{2}bc\sin A$

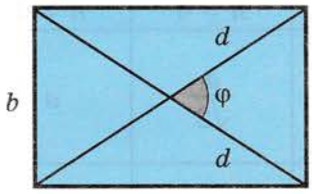
ПЛОЩАДИ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНИКОВ



$$S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$$

Площадь четырехугольника равна половине произведения диагоналей на синус угла между ними.

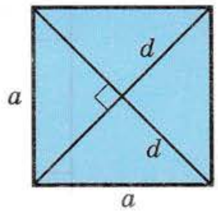
Прямоугольник



$$S = ab$$

$$S=\frac{1}{2}d^2\sin\varphi$$

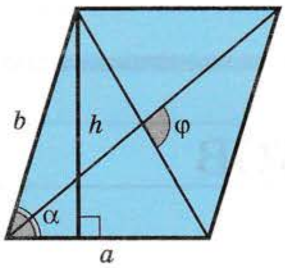
Квадрат



$$S = a^2$$

$$S=\frac{1}{2}d^2$$

Параллелограмм

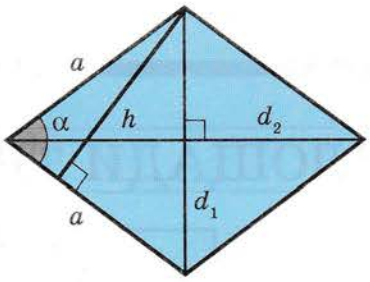


$$S = a\cdot h$$

$$S = ab\sin\alpha$$

$$S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$$

Ромб

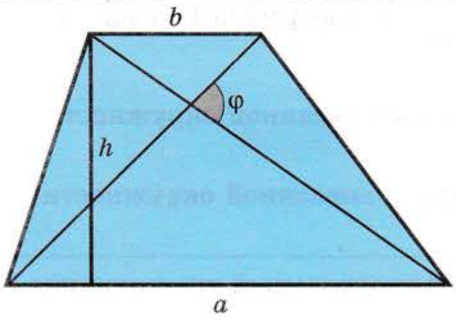


$$S = a\cdot h$$

$$S = a^2\sin\alpha$$

$$S=\frac{1}{2}d_1d_2$$

Трапеция

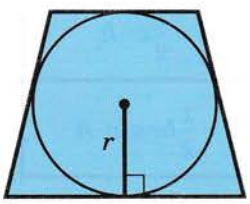


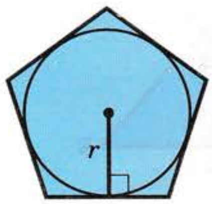
$$S=\frac{a+b}{2}\cdot h$$

$S = m\cdot h$ (m — длина средней линии)

$$S=\frac{1}{2}d_1d_2\sin\varphi$$

Площадь описанного многоугольника



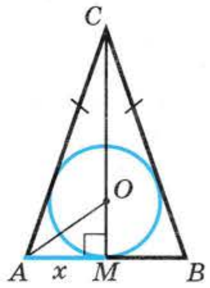


$S = p\cdot r$, где p — полупериметр многоугольника, r — радиус вписанной окружности

ВВЕДЕНИЕ НЕИЗВЕСТНЫХ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ

Ориентир. Если в условии геометрической задачи на вычисление вообще не заданы отрезки или заданные отрезки и углы невозможно объединить в удобный для решения треугольник, то в таком случае обычно вводят неизвестный отрезок (или неизвестный угол, или несколько неизвестных).

Задача. В равнобедренном треугольнике медиана, проведенная к основанию, равна 25 см. Вычислить площадь этого треугольника, если радиус вписанной в него окружности равен 10 см.

План	**Решение и комментарий**
1. *Обозначим какой-то буквой, например x, неизвестный отрезок* (или угол, или несколько неизвестных).	В задаче задана медиана CM, которая одновременно является и биссектрисой, и высотой равнобедренного треугольника ABC $(AC = CB)$, и радиус вписанной окружности OM. Эти два отрезка не являются сторонами удобного для решения треугольника. Тогда выберем какой-либо отрезок как неизвестный, чтобы этот отрезок вместе с заданными отрезками образовывал удобные для решения треугольники. Пусть $x = AM$ $(x > 0)$. Этот отрезок является стороной прямоугольных треугольников, в которых второй стороной является и медиана CM, и радиус OM. 
2. *Составляем уравнение (или систему уравнений) с введенными неизвестными.*	Из $\triangle AMC$: $AC = \sqrt{AM^2 + CM^2} = \sqrt{x^2 + 25^2} = \sqrt{x^2 + 625}$. Чтобы составить уравнение, воспользуемся тем, что центр вписанной окружности лежит в точке пересечения биссектрис, то есть AO — биссектриса угла BAC. Тогда AO является также и биссектрисой $\triangle AMC$. По свойству биссектрисы внутреннего угла треугольника (см. табл. 8) имеем: $$\frac{AC}{AM} = \frac{CO}{OM}, \text{ то есть } \frac{\sqrt{x^2 + 625}}{x} = \frac{15}{10}.$$
3. *Решаем полученное уравнение* (или систему уравнений или преобразовываем их так, чтобы получить ответ на вопрос задачи), *из решений выбираем те, которые удовлетворяют условию геометрической задачи.*	Возводя обе части последнего равенства в квадрат и решая полученное уравнение, получаем $$x^2 = 500.$$ Отсюда $$x = \sqrt{500} = 10\sqrt{5}.$$ (Поскольку $x > 0$, то второй корень полученного уравнения $x = -\sqrt{500} = -10\sqrt{5}$ не удовлетворяет условию задачи и его не записывают в решение.)
4. *Пользуясь найденной величиной, даем ответ на вопрос задачи*	Тогда $$S_{\triangle ABC} = \frac{1}{2} AB \cdot CM = AM \cdot CM = 25x = 250\sqrt{5} \text{ (см}^2\text{)}.$$ *Ответ*: $250\sqrt{5}$ см^2

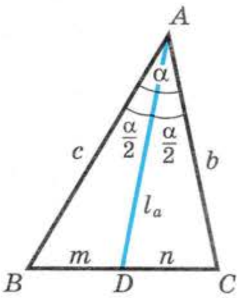
ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДА ПЛОЩАДЕЙ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ

Содержание некоторых вариантов метода площадей

1. *Разбить данный многоугольник на части и записать отдельно площадь всего многоугольника и отдельно сумму площадей всех его частей и приравнять полученные величины.*
2. *Для того чтобы найти отношение отрезков, расположенных на одной прямой, иногда бывает полезно заменить его отношением площадей треугольников с общей вершиной, основаниями которых являются рассматриваемые отрезки.*

Задача 1. Докажите, что **биссектрису $AD = l_a$ треугольника ABC можно вычислить по формуле**

$$l_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\alpha}{2}.$$

План	Решение
1. *Запишем площадь треугольника ABC двумя способами.*	Пусть AD — биссектриса треугольника ABC со сторонами $AB = c$ и $AC = b$. Если $\angle BAC = \alpha$, то $\angle BAD = \angle CAD = \frac{\alpha}{2}$. 1) $S_{\Delta ABC} = S_{\Delta ABD} + S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2}cl_a\sin\frac{\alpha}{2} + \frac{1}{2}bl_a\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}(b+c)l_a\sin\frac{\alpha}{2}$. 2) $S_{\Delta ABC} = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$. 
2. *Приравняем полученные выражения и найдем из полученного равенства значение l_a.*	Приравнивая правые части этих выражений, учтем, что $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$, получаем: $\frac{1}{2}(b+c)l_a\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}bc\sin\alpha$, то есть $\frac{1}{2}(b+c)l_a\sin\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{2}bc\cdot 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$. Отсюда $l_a = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{\alpha}{2}$, что и требовалось доказать.

Задача 2. Докажите, что **биссектриса внутреннего угла треугольника делит противоположную сторону на отрезки, длины которых пропорциональны длинам прилегающих сторон треугольника.**

План	Решение
Чтобы найти отношение отрезков BD и DC, попробуем найти отношение площадей треугольников ABD и ACD с общей вершиной A, основаниями которых являются данные отрезки (тогда и высота этих треугольников, проведенная из вершины A, также будет общей).	Пусть $AD = l_a$ — биссектриса треугольника ABC со сторонами $AB = c$, $AC = b$ и $\angle BAD = \angle CAD = \frac{\alpha}{2}$, $BD = m$, $DC = n$ (см. рисунок). Тогда, с одной стороны, $S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2}cl_a\sin\frac{\alpha}{2}$, $S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2}bl_a\sin\frac{\alpha}{2}$ и $\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ACD}} = \frac{\frac{1}{2}cl_a\sin\frac{\alpha}{2}}{\frac{1}{2}bl_a\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{c}{b}$. (1) С другой стороны, $S_{\Delta ABD} = \frac{1}{2}mh_a$, $S_{\Delta ACD} = \frac{1}{2}nh_a$ и $\frac{S_{\Delta ABD}}{S_{\Delta ACD}} = \frac{\frac{1}{2}mh_a}{\frac{1}{2}nh_a} = \frac{m}{n}$. (2) Приравнивая правые части выражений (1) и (2), получаем $\frac{m}{n} = \frac{c}{b}$, что и требовалось доказать.

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ВСПОМОГАТЕЛЬНОЙ ОКРУЖНОСТИ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ

Ориентиры

Использование вспомогательной окружности при решении планиметрических задач обычно характеризуется оборотами типа «Проведем окружность через точки X, $У$, ...» или «Заметим, что точки X, $У$, ... лежат на одной окружности...». Как известно, вокруг любого треугольника можно описать окружность, поэтому **через любые три точки, не лежащие на одной прямой, всегда можно провести окружность.**

Если приходится описывать окружность около четырехугольника (или вписывать окружность в четырехугольник), то как признаки существования описанной или вписанной в четырехугольник окружности используют утверждения, обратные свойствам вписанной или описанной окружности (табл. 24). Кроме того, признаком существования описанной около четырехугольника окружности является также утверждение, обратное свойству вписанных углов: **если в выпуклом четырехугольнике $ABCD$ $\angle ABD = \angle ACD$, то около этого четырехугольника можно описать окружность.**

Полезно также помнить, что *из всех параллелограммов вписать окружность можно только в ромб (квадрат), а описать окружность можно только около прямоугольника (квадрата).*

Задача 1. Медиана, биссектриса и высота, проведенные из одной вершины треугольника, делят угол при этой вершине на четыре равные части. Определите углы этого треугольника.

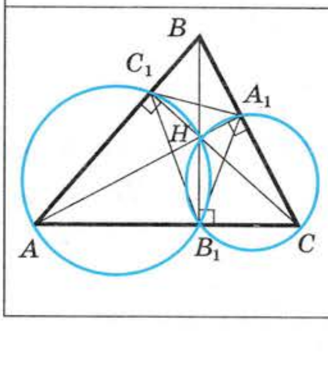
Решение

Пусть дан треугольник ABC, у которого CM — медиана, CD — биссектриса, CH — высота (см. рисунок). Обозначим равные углы, которые по условию образованы при вершине C, через α: $\angle ACM = \angle MCD = \angle DCH = \angle HCB = \alpha$.

Опишем около треугольника ABC окружность. Центр этой окружности O находится в точке пересечения серединных перпендикуляров к сторонам треугольника, то есть на прямой $MT \perp AB$. Из прямоугольного ΔCBH: $\angle CBH = 90^\circ - \alpha$. Продолжим CM до пересечения с окружностью в точке K. Тогда $\angle AKC = \angle CBA = 90^\circ - \alpha$ (как вписанные углы, опирающиеся на одну и ту же дугу). Из ΔACK: $\angle CAK = 180^\circ - \alpha - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ$. Следовательно, $\cup CBK = 180^\circ$, то есть CK — диаметр окружности. Тогда точка O — центр окружности — должна принадлежать двум разным прямым MT и CK, что возможно лишь в случае, когда точка O совпадает с точкой пересечения этих прямых, то есть с точкой M. Но если M — центр окружности, то AB — диаметр этой окружности и, значит, $\angle ACB = 90^\circ$ (как вписанный угол, который опирается на диаметр). Получаем: $4\alpha = 90^\circ$, а это означает, что $\alpha = 22^\circ\, 30'$, $\angle B = 90^\circ - \alpha = 67^\circ\, 30'$, следовательно, $\angle A = 90^\circ - \angle B = 22^\circ\, 30'$.

Задача 2. В остроугольном треугольнике ABC (см. рисунок) проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1. Докажите, что **эти высоты являются биссектрисами углов треугольника $A_1B_1C_1$.**

Решение



Пусть H — точка пересечения высот. В четырехугольнике HA_1CB_1 сумма противоположных углов $\angle A_1 + \angle B_1 = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$, поэтому около него можно описать окружность (диаметра HC) — табл. 24. Тогда $\angle HB_1A_1 = \angle HCA_1$ — как вписанные углы, которые опираются на одну и ту же дугу. Но из прямоугольного ΔCBC_1: $\angle HCA_1 = 90^\circ - \angle B$, тогда и $\angle HB_1A_1 = 90^\circ - \angle B$. Точно так же точки H, C_1, A, B_1 лежат на одной окружности и $\angle HB_1C_1 = \angle HAC_1 = \angle A_1AB = 90^\circ - \angle B$. Таким образом, $\angle HB_1A_1 = \angle HB_1C_1$, то есть B_1B — биссектриса угла $A_1B_1C_1$. Аналогично это утверждение обосновывается и для остальных углов.

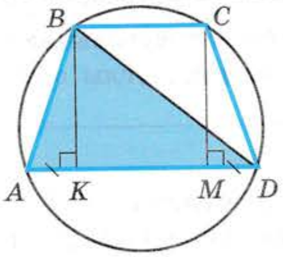
ЗАДАЧИ, СВЯЗАННЫЕ С ОПИСАННОЙ ИЛИ ВПИСАННОЙ ОКРУЖНОСТЬЮ

Ориентиры

1. Решая задачи, связанные с описанной около треугольника окружностью, целесообразно пользоваться теми формулами и соотношениями, которые не зависят от вида треугольника (см. табл. 25) — иначе для решения необходимо рассматривать несколько случаев.
2. Если окружность описана около четырехугольника (или n-угольника, где $n \geqslant 4$), то она описана также около любого треугольника, вершины которого являются вершинами данного четырехугольника (или n-угольника).

Задача 1. В равнобедренной трапеции известны основания — 21 см и 9 см и высота — 8 см. Найдите радиус описанной окружности.

Решение



Пусть в трапеции $ABCD$ (см. рисунок): $BC \parallel AD$, $AB = CD$, $AD = 21$ см, $BC = 9$ см и высота $BK = 8$ см ($BK \perp AD$). Если окружность проходит через четыре точки A, B, C, D, то она также проходит через любые три из этих точек и поэтому совпадает с окружностью, описанной около треугольника ABD. Найдем радиус окружности, описанной около треугольника ABD. Если CM — вторая высота данной равнобедренной трапеции, то, учитывая равенство прямоугольных треугольников ABK и DCM и то, что $BCMK$ — прямоугольник, получаем: $AK = MD = \dfrac{AD - BC}{2} = 6$ (см).

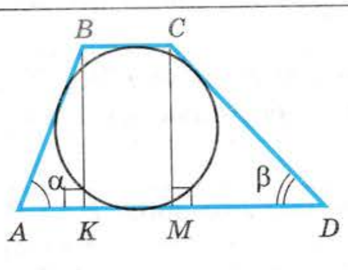
Тогда из $\Delta\, ABK$: $AB = \sqrt{AK^2 + BK^2} = 10$ (см).

Из прямоугольного треугольника BKD: $BD = \sqrt{DK^2 + BK^2} = 17$ (см).

Следовательно, радиус окружности, описанной около треугольника ABD (а значит, и около трапеции $ABCD$), равен (табл. 25) $R = \dfrac{AB \cdot BD \cdot AD}{4S_{\Delta ABD}} = \dfrac{AB \cdot BD \cdot AD}{4 \cdot \frac{1}{2} \cdot AD \cdot BK} = 10{,}625$ (см).

Задача 2. Около окружности радиусом R описана трапеция с углами α и β при большем основании. Найдите площадь этой трапеции.

Решение



Пусть в трапеции $ABCD$ (см. рисунок): $BC \parallel AD$, $\angle BAD = \alpha$, $\angle CDA = \beta$, $r_{\text{впис.окр}} = R$. Если трапеция описана около окружности, то ее высота равна диаметру этой окружности (табл. 24). Поэтому, если BK и CM — высоты трапеции, то $BK = CM = 2R$.

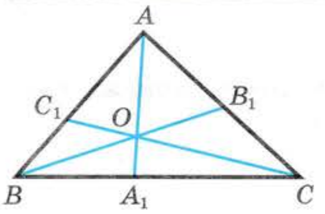
Из прямоугольного треугольника ABK: $AB = \dfrac{BK}{\sin\alpha} = \dfrac{2R}{\sin\alpha}$.

Из прямоугольного треугольника CMD: $CD = \dfrac{CM}{\sin\beta} = \dfrac{2R}{\sin\beta}$.

Так как трапеция $ABCD$ описана около окружности, то по свойству описанного четырехугольника (табл. 24) $AD + BC = AB + CD = \dfrac{2R}{\sin\alpha} + \dfrac{2R}{\sin\beta}$. Тогда $S_{ABCD} = \dfrac{AD + BC}{2} \cdot BK = 2R^2\left(\dfrac{1}{\sin\alpha} + \dfrac{1}{\sin\beta}\right)$.

НЕКОТОРЫЕ ПОЛЕЗНЫЕ ТЕОРЕМЫ

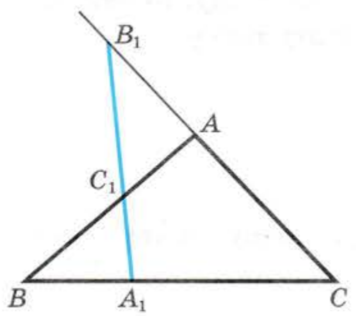
Теорема Чевы

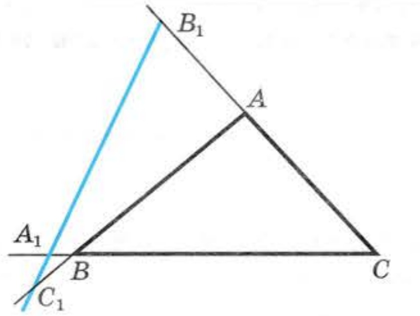


Если на сторонах AB, BC и CA треугольника ABC взяты точки C_1, A_1 и B_1, то отрезки AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке тогда и только тогда, когда

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1$$

Теорема Менелая

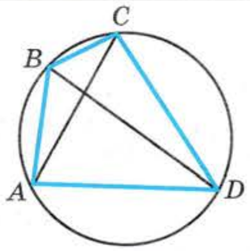




Если на сторонах AB и CB и на продолжении стороны CA (или на продолжении сторон AB, CB и CA) треугольника ABC взяты соответственно точки C_1, A_1 и B_1, то эти точки лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда

$$\frac{AB_1}{B_1C}\cdot\frac{CA_1}{A_1B}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1$$

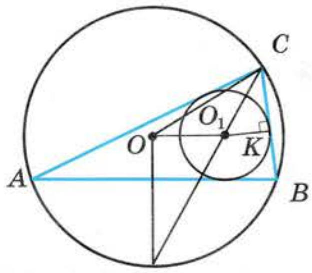
Теорема Птолемея



Произведение диагоналей вписанного в окружность четырехугольника равняется сумме произведений противоположных сторон:

$$AC\cdot BD = AB\cdot CD + BC\cdot AD$$

Формула Эйлера



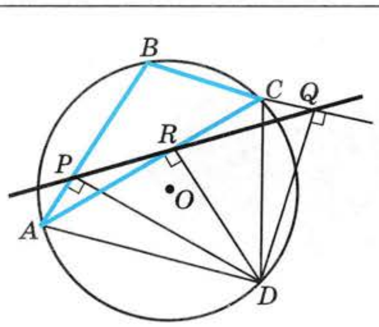
В треугольнике радиус R описанной окружности и радиус r вписанной окружности связаны с расстоянием d между их центрами соотношением

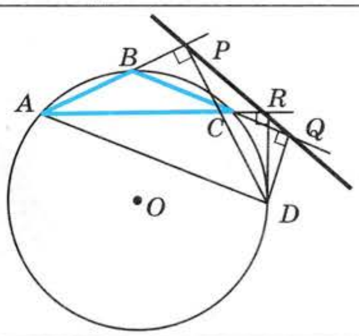
$$d^2 = R^2 - 2Rr.$$

Например, если в треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности, O_1 — центр вписанной окружности, O_1K — радиус вписанной окружности, OC — радиус описанной окружности, то

$$O_1O^2 = OC^2 - 2OC\cdot O_1K$$

Прямая Симсона





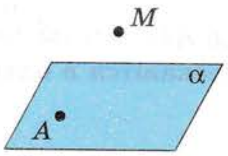
Основания перпендикуляров, проведенных к сторонам треугольника (или к их продолжениям) из произвольной точки описанной окружности, лежат на одной прямой.

(Эту прямую называют *прямой Симсона*.)

P, R, Q — основания перпендикуляров.

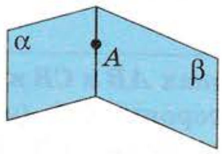
Таблица 34

АКСИОМЫ СТЕРЕОМЕТРИИ

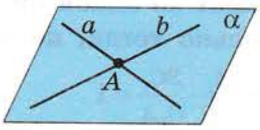


$A \in \alpha;\ M \notin \alpha$

1. Какова бы ни была плоскость, существуют точки, принадлежащие этой плоскости, и точки, не принадлежащие ей.



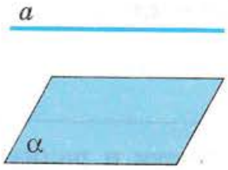
2. Если две различные плоскости имеют общую точку, то они пересекаются по прямой, проходящей через эту точку.



3. Если две различные прямые имеют общую точку, то через них можно провести плоскость, и притом только одну.

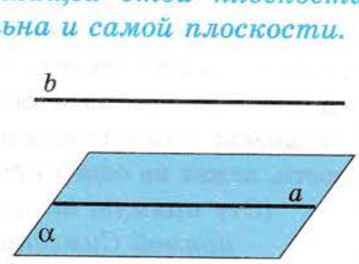
Таблица 35

ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

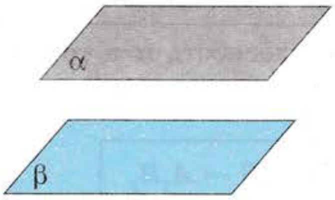


Определение. Прямую и плоскость называют ***параллельными***, если они не пересекаются.

$a \parallel \alpha$

Признак	Свойство
Если $b \parallel a$ (a в плоскости α), **то** $b \parallel \alpha$.	**Если** $a \parallel \alpha$, а β проходит через a и пересекает α по b, **то** $a \parallel b$.
Если прямая, не принадлежащая плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, принадлежащей этой плоскости, то она параллельна и самой плоскости.	*Если через прямую, параллельную плоскости, провести вторую плоскость, пересекающую первую, то прямая пересечения плоскостей параллельна первой прямой.*
	

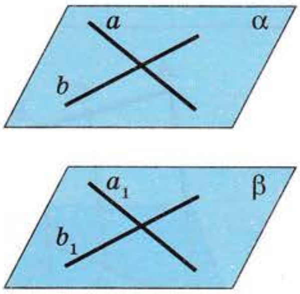
ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ ПЛОСКОСТЕЙ



Определение. Две плоскости называют ***параллельными***, если они не пересекаются.

$\boxed{\alpha \parallel \beta}$

Признак



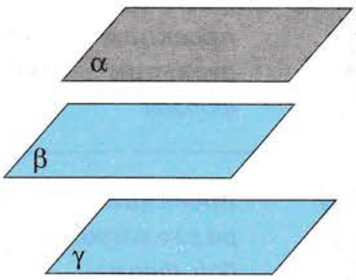
Если $a \parallel a_1$, $b \parallel b_1$
(a и b лежат в α,
a_1 и b_1 лежат в β),
то $\alpha \parallel \beta$.

Если две пересекающиеся прямые одной плоскости соответственно параллельны двум прямым другой плоскости, то эти плоскости параллельны.

Свойства

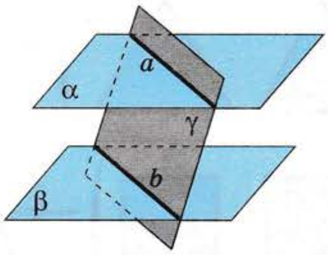
Если $\beta \parallel \alpha$ и $\gamma \parallel \alpha$,
то $\beta \parallel \gamma$.

Если две различные плоскости параллельны третьей, то они параллельны между собой.



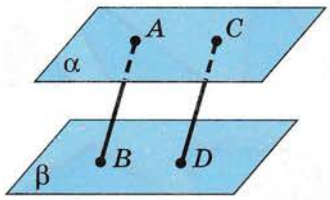
Если $\alpha \parallel \beta$ и γ пересекает α по a, γ пересекает β по b,
то $a \parallel b$.

Если две параллельные плоскости пересекаются третьей, то прямые пересечения параллельны.

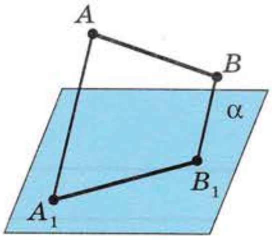


Если $AB \parallel CD$ и $\alpha \parallel \beta$
($A \in \alpha$, $C \in \alpha$, $B \in \beta$, $D \in \beta$),
то $AB = CD$.

Отрезки параллельных прямых, заключенные между параллельными плоскостями, равны.



ИЗОБРАЖЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ ФИГУР НА ПЛОСКОСТИ



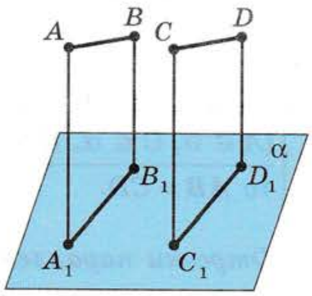
$AA_1 \parallel BB_1$. Прямая AA_1 пересекает плоскость α в точке A_1. Точка A проектируется в точку A_1 на плоскости α.

$A \to A_1$	$B \to B_1$	$AB \to A_1B_1$

Отрезок проектируется в отрезок
($AB \nparallel AA_1$ — отрезок не параллелен направлению проектирования).

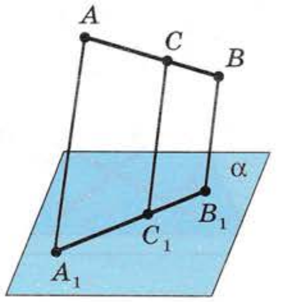
Если $AB \parallel CD$
($AB \to A_1B_1$, $CD \to C_1D_1$),
то $A_1B_1 \parallel C_1D_1$.

При параллельном проектировании параллельность отрезков сохраняется.



$$\boxed{\frac{AC}{CB} = \frac{A_1C_1}{C_1B_1}}$$

При параллельном проектировании отношение отрезков одной прямой или параллельных прямых сохраняется.

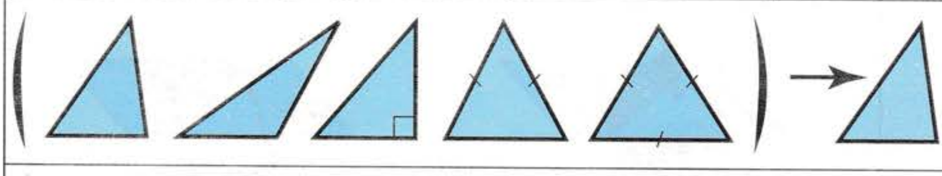


Свойства

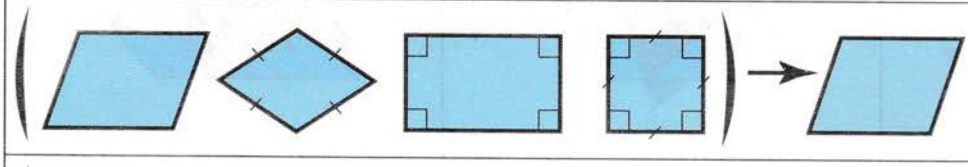
Если C — середина AB, $AB \to A_1B_1$, $C \to C_1$,
то C_1 — середина A_1B_1.

Середина отрезка проектируется в середину отрезка проекции.

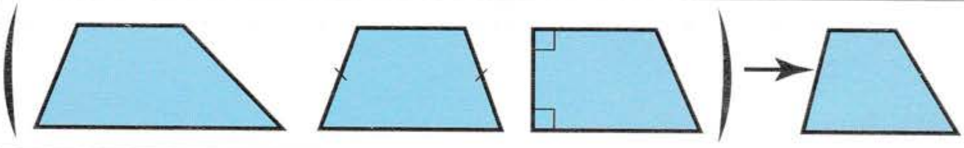
Параллельные проекции некоторых плоских фигур
(плоскость фигуры не параллельна направлению проектирования)



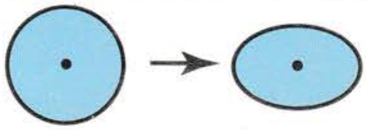
проекция — треугольник любой формы



проекция — параллелограмм любой формы

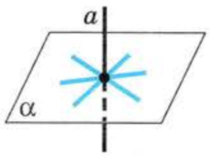


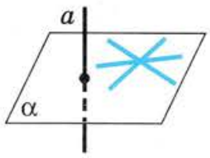
проекция — трапеция любой формы



проекция окружности — эллипс

ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМОЙ И ПЛОСКОСТИ

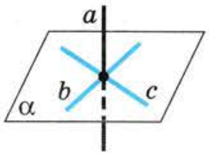




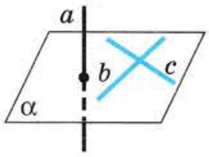
Определение. Прямую, пересекающую плоскость, называют ***перпендикулярной к этой плоскости***, если она перпендикулярна любой прямой, лежащей в данной плоскости.

$\boxed{a \perp \alpha}$ ⇔ $\boxed{a \perp x, \text{ где } x \text{ — любая прямая плоскости } \alpha}$

Признак перпендикулярности прямой и плоскости

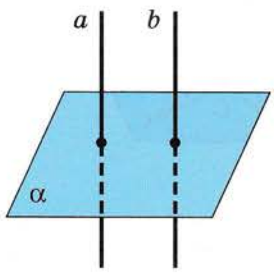


Если $a \perp b$ и $a \perp c$ (b и c — в плоскости α и пересекаются),
то $\boldsymbol{a} \perp \alpha$.



Если прямая перпендикулярна двум пересекающимся прямым, лежащим в плоскости, то она перпендикулярна данной плоскости.

Свойства перпендикулярных прямой и плоскости

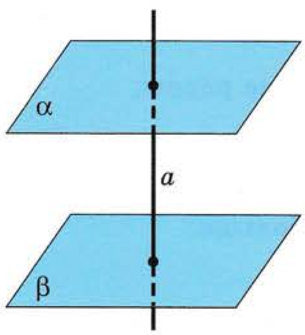


Если $a \parallel b$ и $\alpha \perp a$,
то $\alpha \perp \boldsymbol{b}$.

Если плоскость перпендикулярна одной из двух параллельных прямых, то она перпендикулярна и другой.

Если $a \perp \alpha$ и $b \perp \alpha$,
то $\boldsymbol{a} \parallel \boldsymbol{b}$.

Две прямые, перпендикулярные одной и той же плоскости, параллельны.



Если $\alpha \parallel \beta$ и $a \perp \alpha$,
то $\boldsymbol{a} \parallel \beta$.

Если прямая перпендикулярна одной из двух параллельных плоскостей, то она перпендикулярна и другой.

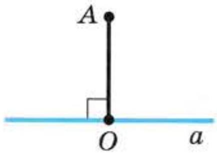
Если $\alpha \perp a$ и $\beta \perp a$,
то $\alpha \parallel \beta$.

Две различные плоскости, перпендикулярные одной и той же прямой, параллельны.

ПЕРПЕНДИКУЛЯР И НАКЛОННАЯ

на плоскости

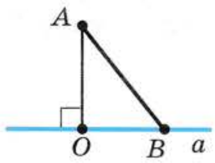
$AO \perp a,\ O \in a$



AO — перпендикуляр, опущенный из точки A на прямую a

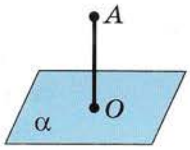
AO — расстояние от точки A до прямой a

AB — наклонная

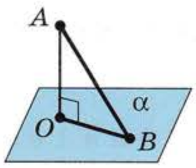


в пространстве

$AO \perp \alpha,\ O \in \alpha$



AO — перпендикуляр из точки A к плоскости α



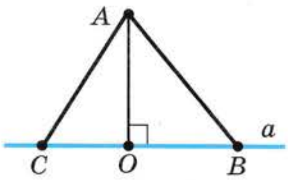
AO — расстояние от точки A до плоскости α

AB — наклонная

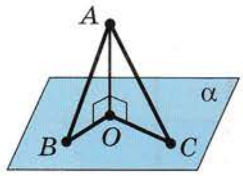
$AO < AB$	Перпендикуляр короче наклонной	$AO < AB$

OB — проекция наклонной AB на прямую a

OB — проекция наклонной AB на плоскость α



$AB = AC$	$\Leftrightarrow$	$BO = OC$
$AB > AC$	$\Leftrightarrow$	$BO > OC$



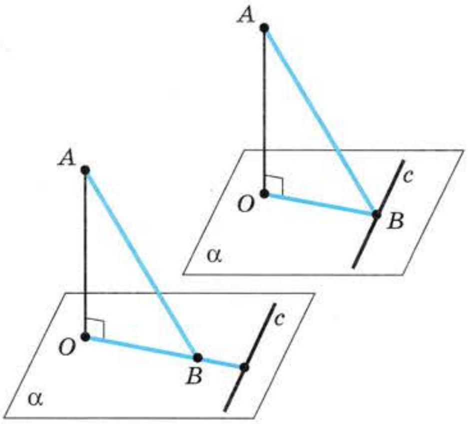
Если из одной точки к одной прямой проведены две наклонные, то

Если из одной точки к одной плоскости проведены две наклонные, то

- равные наклонные имеют равные проекции;
- если проекции наклонных равны, то и сами наклонные равны;
- бóльшая наклонная имеет бóльшую проекцию;
- из двух наклонных больше та, у которой проекция больше.

Таблица 40

ТЕОРЕМА О ТРЕХ ПЕРПЕНДИКУЛЯРАХ



OB — проекция AB на плоскость α, c — прямая на плоскости α, $OB \perp c$

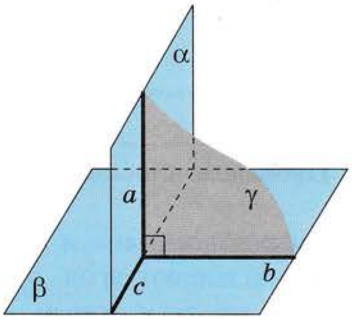
$\Leftrightarrow$ $\boxed{AB \perp c}$

Если прямая на плоскости перпендикулярна проекции наклонной на эту плоскость, то она перпендикулярна и наклонной.

И наоборот: если прямая на плоскости перпендикулярна наклонной, то она перпендикулярна и проекции наклонной.

Таблица 41

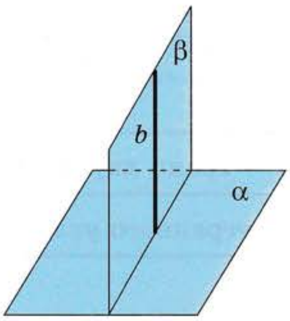
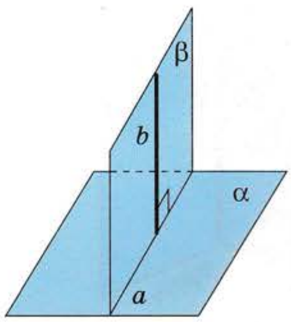
ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ДВУХ ПЛОСКОСТЕЙ



Определение. Две пересекающиеся плоскости называют ***перпендикулярными***, если третья плоскость, перпендикулярная прямой пересечения этих плоскостей, пересекает их по перпендикулярным прямым.

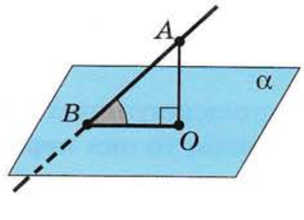
$\boxed{\alpha \perp \beta}$ $\Leftrightarrow$

α пересекает β по прямой c, $\gamma \perp c$, γ пересекает α по прямой a, γ пересекает β по прямой b, $a \perp b$

Признак перпендикулярности плоскостей	Свойство
Если $b \perp \alpha$ и β проходит через b, **то** $\beta \perp \alpha$.	**Если** $\beta \perp \alpha$, β пересекает α по a и $b \perp a$ (b лежит в β), **то** $b \perp \alpha$.
Если плоскость проходит через прямую, перпендикулярную другой плоскости, то эти плоскости перпендикулярны.	*Если прямая, лежащая в одной из двух перпендикулярных плоскостей, перпендикулярна линии их пересечения, то она перпендикулярна и другой плоскости.*
	

УГЛЫ В ПРОСТРАНСТВЕ

1. Угол между прямой и плоскостью



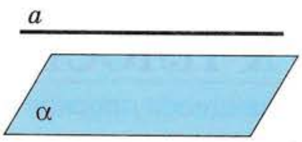
Определение. **Углом между прямой** и пересекающей ее плоскостью называют угол, образованный этой прямой и ее проекцией на плоскость.

$\angle ABO$ — угол между прямой AB и плоскостью α

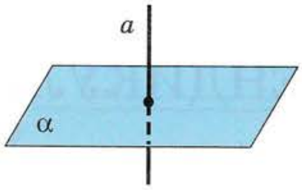
(BO — проекция AB на плоскость α, $AO \perp \alpha$)

Особые случаи

1) $a \parallel \alpha$ / a лежит в α $\Leftrightarrow$ $\angle(a, \alpha) = 0$

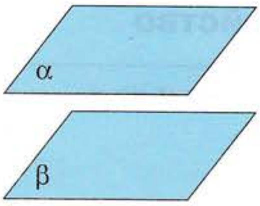


2) $a \perp \alpha$ $\Leftrightarrow$ $\angle(a, \alpha) = 90°$



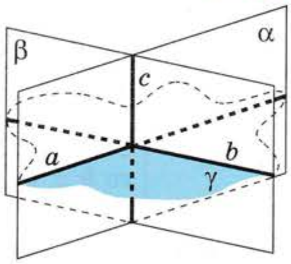
2. Угол между плоскостями

1) $\alpha \parallel \beta$ / $\alpha = \beta$ $\Leftrightarrow$ $\angle(\alpha, \beta) = 0$



2) α пересекает β по прямой c. Проведем плоскость $\gamma \perp c$.

Определение. ***Углом между пересекающимися плоскостями*** α ***и*** β называют угол, образованный прямыми, по которым плоскость γ пересекает плоскости α и β.

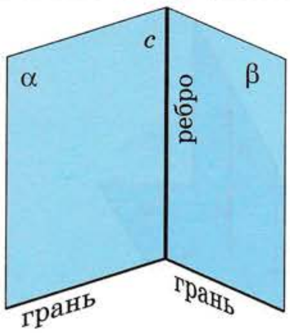


$\angle(\alpha, \beta) = \angle(a, b)$

(γ пересекает α по прямой a, γ пересекает β по прямой b)

$0° \leqslant \angle(\alpha, \beta) \leqslant 90°$

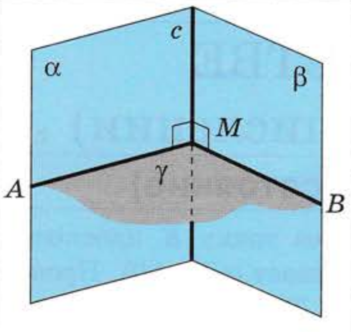
3. Двугранный угол (угол между полуплоскостями)



Определение. ***Двугранным углом*** называют фигуру, образованную двумя полуплоскостями с общей ограничивающей прямой.

Полуплоскости α и β — грани двугранного угла
c — ребро двугранного угла

Линейный угол двугранного угла



Определение. ***Линейным углом двугранного угла*** называют угол между лучами, по которым плоскость, перпендикулярная ребру двугранного угла, пересекает его грани.

$\boxed{\angle AMB \text{ — линейный угол}}$

($\gamma \perp c$, γ пересекает α по лучу MA, γ пересекает β по лучу MB)

$\boxed{0^\circ \leqslant \angle AMB \leqslant 180^\circ}$

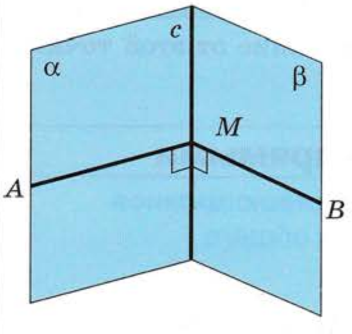
Свойство

Так как пл. $AMB \perp c$, то пл. $AMB \perp \alpha$ и пл. $AMB \perp \beta$, то есть *плоскость линейного угла перпендикулярна каждой грани двугранного угла.*

Практические приемы построения линейного угла

$M \in c$,
$MA \perp c$ (в грани α),
$MB \perp c$ (в грани β).

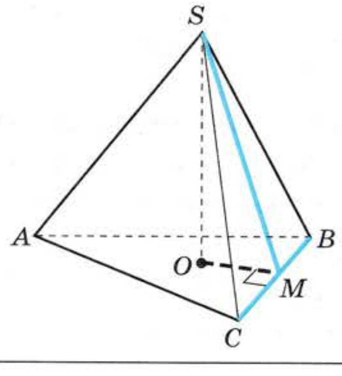
$\boxed{\angle AMB \text{ — линейный}}$



$SO \perp$ пл. ABC
(SO — высота пирамиды).

Проводим $OM \perp BC$ и соединяем точки S и M.
Тогда $SM \perp BC$ по теореме о трех перпендикулярах, поэтому

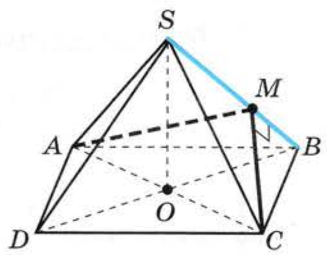
$\boxed{\angle SMO \text{ — линейный угол двугранного угла при ребре } BC}$



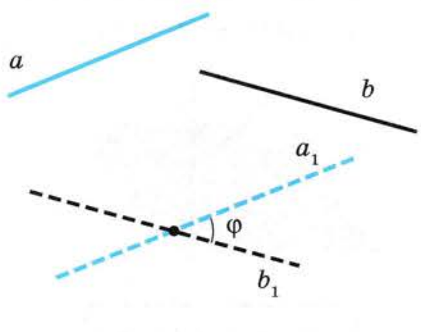
$SABCD$ — правильная пирамида.

Проводим $CM \perp SB$ и соединяем точки A и M. Тогда
$$\triangle AMB = \triangle CMB$$
(по двум сторонам и углу между ними). Следовательно,
$$\angle AMB = \angle CMB = 90^\circ,$$
то есть $AM \perp SB$ и

$\boxed{\angle AMC \text{ — линейный угол двугранного угла при ребре } SB}$



4. Угол между скрещивающимися прямыми



Определение. ***Углом между скрещивающимися прямыми*** называют угол между пересекающимися прямыми, параллельными данным скрещивающимся прямым.

$\boxed{a_1 \parallel a;\ \ b_1 \parallel b}$

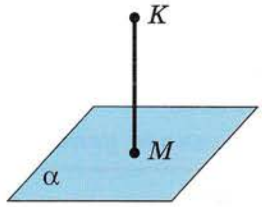
$\angle (a, b) = \angle (a_1, b_1) = \varphi$
(меньший из смежных углов)

$\boxed{0^\circ < \angle (a, b) \leqslant 90^\circ}$

РАССТОЯНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕ
(приемы, используемые при их вычислении)

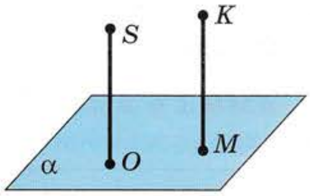
1. Расстояние от точки до плоскости (ρ — расстояние)

Проводим $KM \perp \alpha$ ($M \in \alpha$)



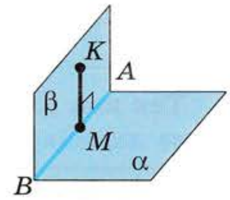
$KM = \rho\ (K; \alpha)$

$SO \perp \alpha$. Проводим $KM \parallel SO$. Тогда $KM \perp \alpha$ и



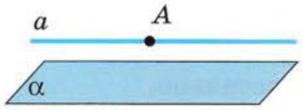
$KM = \rho\ (K; \alpha)$

Проводим через точку K плоскость $\beta \perp \alpha$ (β пересекает α по AB). Проводим $KM \perp AB$. Тогда $KM \perp \alpha$ и



$KM = \rho\ (K; \alpha)$

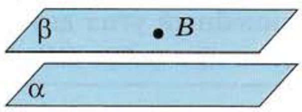
2. Расстояние между параллельными прямой и плоскостью



$a \parallel \alpha$	$A \in \alpha$
$\rho\ (a; \alpha) = \rho\ (A; \alpha)$	

Выбираем на прямой a произвольную точку A и находим расстояние от этой точки до плоскости α.

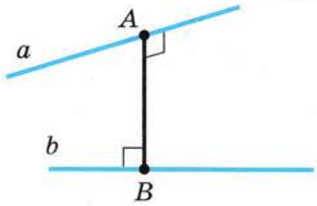
3. Расстояние между параллельными плоскостями



$\beta \parallel \alpha$	$B \in \beta$
$\rho\ (\beta; \alpha) = \rho\ (B; \alpha)$	

Выбираем в плоскости β произвольную точку B и находим расстояние от этой точки до плоскости α.

4. Расстояние между скрещивающимися прямыми



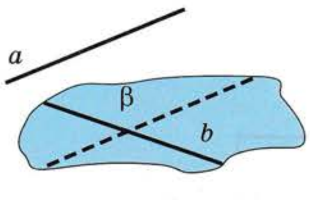
Определение. **Расстоянием между скрещивающимися прямыми** называют длину их общего перпендикуляра.

$AB \perp a$, $AB \perp b$	$\rho\ (a; b) = AB$

Прямые a и b — скрещивающиеся.

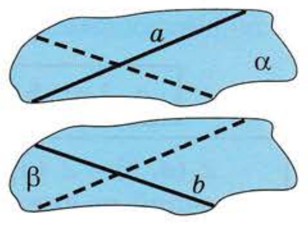
Приемы вычисления расстояния между скрещивающимися прямыми

Проводим через прямую b плоскость $\beta \parallel a$.



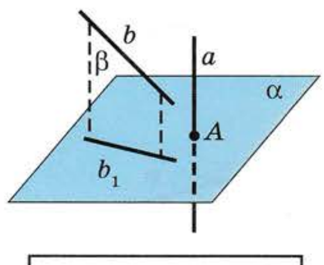
$\rho\ (a; b) = \rho\ (a; \beta)$

Проводим через прямые a и b параллельные плоскости $\alpha \parallel \beta$.



$\rho\ (a; b) = \rho\ (\alpha; \beta)$

Проводим плоскость $\alpha \perp a$ и проектируем прямые a и b на эту плоскость: $a \to A$, $b \to b_1$.



$\rho\ (a; b) = \rho\ (A; b_1)$

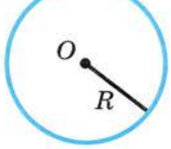
ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ МЕСТА ТОЧЕК (ГМТ)

Определение. **Геометрическим местом точек** плоскости (пространства) называют фигуру, состоящую из всех точек плоскости (пространства), обладающих определенным свойством.

Фигура F — ГМТ, обладающих данным свойством	$\Leftrightarrow$	1. Если точка $M \in F$, **то M обладает данным свойством.** 2. Если точка M обладает данным свойством, **то $M \in F$.**

На плоскости	В пространстве

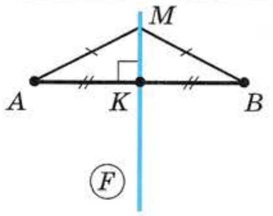
1. ГМТ, находящихся на некотором расстоянии *R* от данной точки *O* (то есть равноудаленных от данной точки)



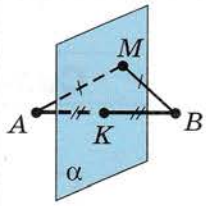
F — окружность с центром O и радиусом R

F — сфера с центром O и радиусом R

2. ГМТ, равноудаленных от концов данного отрезка *AB*



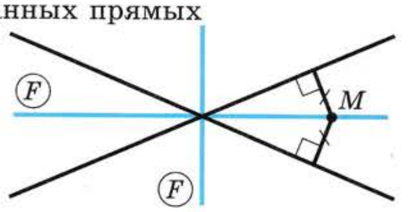
F — серединный перпендикуляр к отрезку AB



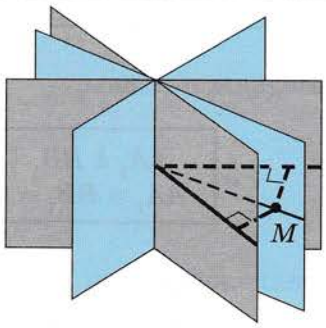
F — плоскость α, проходящая через середину отрезка AB и перпендикулярная ему

3. ГМТ, равноудаленных от двух пересекающихся прямых

F — биссектрисы всех углов, образованных при пересечении данных прямых

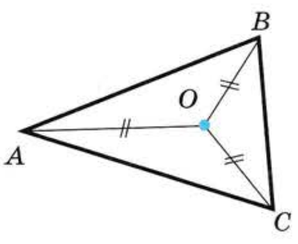


3. ГМТ, равноудаленных от двух пересекающихся плоскостей



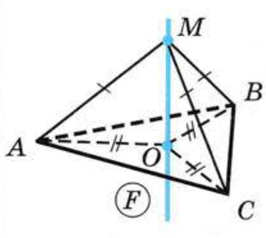
F — биссекторные плоскости (то есть *плоскости, которые делят двугранные углы пополам и проходят через ребро двугранных углов*) всех двугранных углов, образованных при пересечении заданных плоскостей

4. ГМТ, равноудаленных от вершин треугольника



F — центр окружности, описанной около треугольника

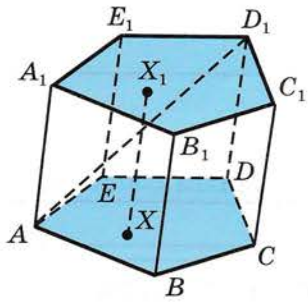
$\boxed{F = O}$



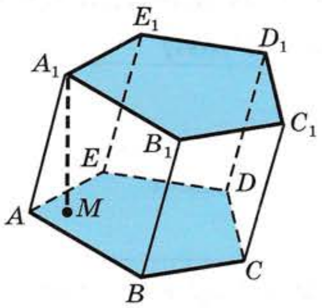
F — прямая, перпендикулярная плоскости треугольника и проходящая через центр окружности, описанной около треугольника

ПРИЗМА

Определение. ***Призмой*** называют многогранник, состоящий из двух плоских многоугольников, лежащих в разных плоскостях и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих многоугольников.



$ABCDE$ и $A_1B_1C_1D_1E_1$ — основания призмы
AA_1; BB_1; ... — боковые ребра
ABB_1A_1; BCC_1B_1; ... — боковые грани



AD_1 — диагональ призмы (отрезок, соединяющий две вершины призмы, не принадлежащие одной грани)

Высота призмы — расстояние между плоскостями ее оснований.
$A_1M \perp$ пл. $ABCDE$; $A_1M = H$ — высота

Свойства

1. Основания призмы равны.

$$\boxed{ABCDE = A_1B_1C_1D_1E_1}$$

2. Основания призмы лежат в параллельных плоскостях.

$$\boxed{\text{пл. } ABCDE \parallel \text{пл. } A_1B_1C_1D_1E_1}$$

3. Боковые ребра призмы параллельны и равны.

$$AA_1 \parallel BB_1 \parallel CC_1 \ldots$$
$$AA_1 = BB_1 = CC_1 = \ldots$$

4. Боковые грани призмы — параллелограммы.

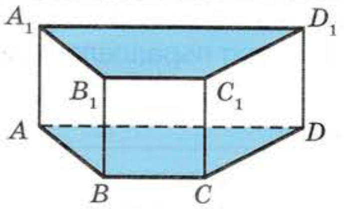
ABB_1A_1 — параллелограмм, BCC_1B_1 — параллелограмм, ...

5. $\boxed{V_{\text{призмы}} = S_{\text{осн}} \cdot H_{\text{призмы}}}$

6. $S_{\text{бок}} = P_{\text{перпендикулярного сечения}} \cdot AA_1$ $\quad \left(S_{\text{бок}} = S_{ABB_1A_1} + S_{BCC_1B_1} + \ldots + S_{AEE_1A_1}\right)$

$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$

ПРЯМАЯ ПРИЗМА



Определение. Призму называют ***прямой***, если ее боковые ребра перпендикулярны основаниям.

$AA_1 \perp$ пл. $ABCD$, $BB_1 \perp$ пл. $ABCD$, ...

Свойства

1. У прямой призмы высота равна боковому ребру.

$H_{\text{прямой призмы}} = AA_1 = BB_1 = \ldots$

2. Боковые грани прямой призмы — прямоугольники.

ABB_1A_1 — прямоугольник, BCC_1B_1 — прямоугольник, ...

3. $V_{\text{прямой призмы}} = S_{\text{осн}} \cdot H = S_{\text{осн}} \cdot AA_1$

4. $S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} \cdot AA_1$

$S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}$

Правильная призма

Определение. Прямую призму называют ***правильной***, если ее основания являются правильными многоугольниками.

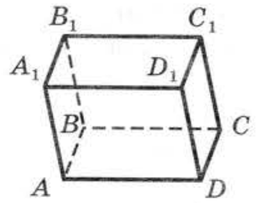
треугольная

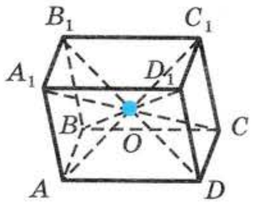
четырехугольная

пятиугольная

шестиугольная

ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕД





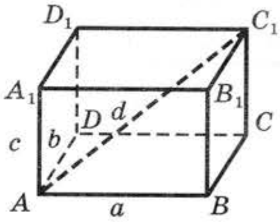
Определение. ***Параллелепипедом*** называют призму, в основании которой лежит параллелограмм.

Свойства

1. У параллелепипеда все грани — параллелограммы.
2. У параллелепипеда противолежащие грани параллельны и равны.
3. Диагонали параллелепипеда пересекаются в одной точке и точкой пересечения делятся пополам.

$\boxed{O \text{ — середина } A_1C,\ BD_1,\ AC_1,\ B_1D}$

Прямоугольный параллелепипед



Определение. Прямой параллелепипед, у которого основанием является прямоугольник, называют ***прямоугольным параллелепипедом***.

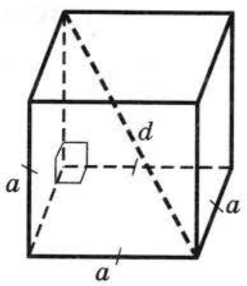
Свойства

1. У прямоугольного параллелепипеда все грани — прямоугольники.
2. $\boxed{d^2 = a^2 + b^2 + c^2}$ $\left(AC_1^2 = AB^2 + AD^2 + AA_1^2\right)$ *В прямоугольном параллелепипеде квадрат любой диагонали равен сумме квадратов трех его измерений.*
3. $\boxed{V_{\text{прям. пар}} = AB \cdot AD \cdot AA_1 = abc}$
4. $\boxed{S_{\text{бок}} = P_{\text{осн}} \cdot AA_1 = 2\,(AB + AD) \cdot AA_1 = 2\,(a + b)\,c}$

   $\boxed{S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}}}$

Куб

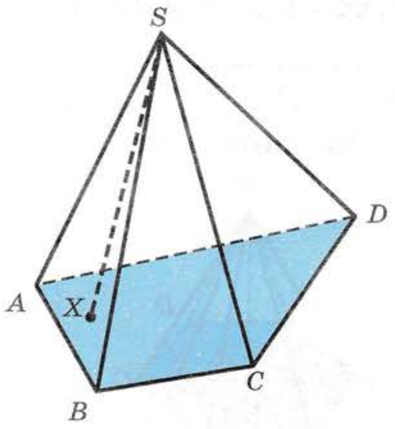
Определение. ***Кубом*** называют прямоугольный параллелепипед, у которого все ребра равны.



Свойства

1. У куба все грани — квадраты.
2. $\boxed{d = a\sqrt{3}}$ $(d^2 = a^2 + a^2 + a^2$, где a — ребро куба, d — диагональ куба)
3. $\boxed{V_{\text{куба}} = a^3}$
4. $\boxed{S_{\text{бок. куба}} = 4a^2}$ $\boxed{S_{\text{полн. куба}} = 6a^2}$

ПИРАМИДА



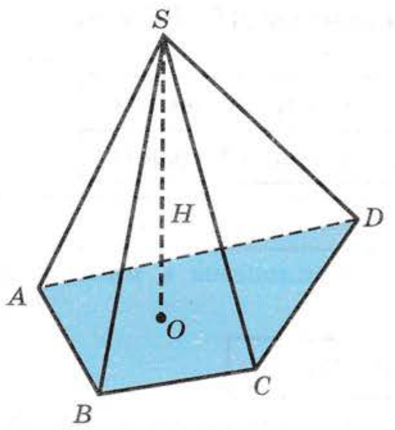
Определение. ***Пирамидой*** называют многогранник, состоящий из плоского многоугольника (*основания пирамиды*), точки, не лежащей в плоскости основания (*вершины пирамиды*), и всех отрезков, соединяющих вершину пирамиды с точками основания.

$ABCD$ — основание пирамиды	S — вершина пирамиды

SA, SB, SC, SD — боковые ребра

$\triangle ASB$, $\triangle BSC$, $\triangle CSD$, $\triangle ASD$ — боковые грани

Высота пирамиды — перпендикуляр, опущенный из вершины пирамиды на плоскость основания.



SO — высота пирамиды
$SO = H$ ($SO \perp$ пл. $ABCD$)

$$V_{\text{пир}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H$$

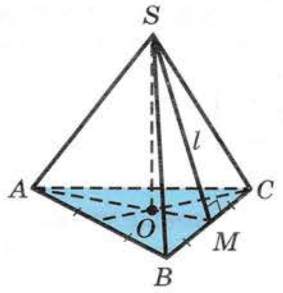
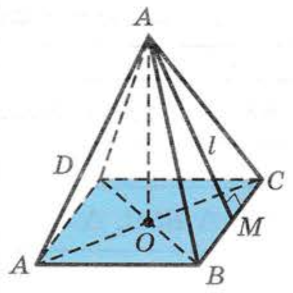
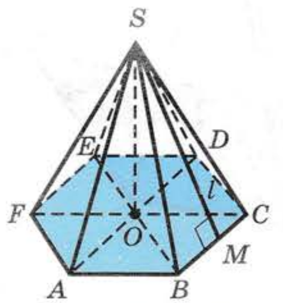
$$S_{\text{бок. пир}} = S_{\triangle ASB} + S_{\triangle BSC} + S_{\triangle CSD} + S_{\triangle ASD}$$

$$S_{\text{полн. пир}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}}$$

ПРАВИЛЬНАЯ ПИРАМИДА

Определение. Пирамиду называют ***правильной***, если ее основанием является правильный многоугольник, а основание высоты совпадает с центром этого многоугольника.

Некоторые виды правильных пирамид

Треугольная	Четырехугольная	...	Шестиугольная	...
				
$\triangle ABC$ — правильный	$ABCD$ — квадрат		$ABCDEF$ — правильный шестиугольник	
O — точка пересечения медиан (высот и биссектрис), центр вписанной и описанной окружностей	O — точка пересечения диагоналей		O — точка пересечения диагоналей AD, BE и FC	

SO — высота правильной пирамиды ($SO \perp$ пл. ABC; O — центр основания)

SM — апофема правильной пирамиды ($SM \perp BC$) (высота боковой грани)

Свойства

1. У правильной пирамиды боковые ребра равны и одинаково наклонены к плоскости основания.

$$SA = SB = SC = \dots \qquad \angle SAO = \angle SBO = \angle SCO = \dots$$

2. Боковые грани правильной пирамиды — равные равнобедренные треугольники, одинаково наклоненные к основанию.

$$\triangle ASB = \triangle BSC = \dots$$

3. $S_{бок} = \frac{1}{2}P_{осн}\cdot SM = \frac{1}{2}P_{осн}\cdot l$, где l — апофема

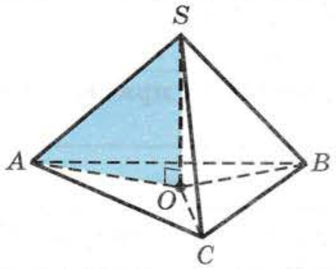
4. $S_{бок} = \frac{S_{осн}}{\cos\varphi}$, где $\varphi = \angle SMO$ — угол наклона всех боковых граней к основанию

$S_{бок} = S_{бок.\ грани}\cdot n$, где n — число граней

5. $S_{полн} = S_{бок} + S_{осн}$

6. $V_{пир} = \frac{1}{3}S_{осн}\cdot H$

ПОЛОЖЕНИЕ ВЫСОТЫ В НЕКОТОРЫХ ВИДАХ ПИРАМИД

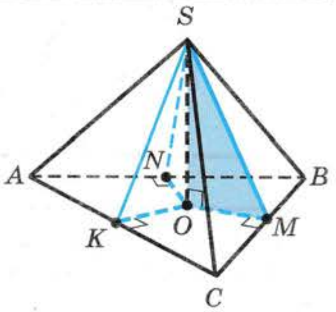


1. **Если** все боковые ребра пирамиды равны или наклонены под одним углом к плоскости основания, или образуют равные углы с высотой пирамиды, **то основание высоты пирамиды является центром окружности, описанной около основания** (и наоборот).

Если в пирамиде $SABC$: $SA = SB = SC$, или $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO$, или $\angle ASO = \angle BSO = \angle CSO$ и $SO \perp$ пл. ABC, **то O — центр описанной около основания окружности ($OA = OB = OC$).**	**Если** в пирамиде $SABC$: $SO \perp$ пл. ABC и O — центр описанной около основания окружности, **то $SA = SB = SC$ и $\angle SAO = \angle SBO = \angle SCO$ и $\angle ASO = \angle BSO = \angle CSO$.**

Для решения используют прямоугольный $\triangle SAO$, в котором:

$SO \perp AO$, $AO = R_{\text{опис}}$ около основания окружности,
$\angle SAO$ — угол наклона бокового ребра SA к плоскости основания



2. **Если** все боковые грани пирамиды одинаково наклонены к основанию, **то основанием высоты пирамиды является центр окружности, вписанной в основание** (и наоборот).

Если в пирамиде $SABC$: грани SAB, SAC и SBC одинаково наклонены к основанию ABC (то есть $\angle SMO = \angle SKO = \angle SNO$ — соответствующие линейные углы равны) и $SO \perp$ пл. ABC, **то O — центр окружности, вписанной в основание ($OK = OM = ON = r_{\text{впис}}$).**	**Если** в пирамиде $SABC$: $SO \perp$ пл. ABC и O — центр окружности, вписанной в основание, **то $\angle SMO = \angle SKO = \angle SNO$** (то есть **все боковые грани пирамиды наклонены под одним углом к основанию пирамиды).**

Для решения используют прямоугольный $\triangle SOM$, в котором:

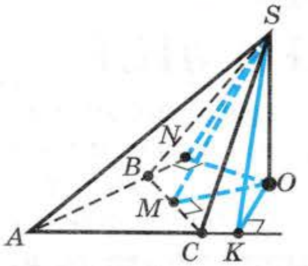
$SO \perp OM$, $OM = r_{\text{впис}}$ — радиус вписанной в основание окружности ($OM \perp BC$),
$\angle SOM$ — угол наклона боковой грани SBC к основанию
($\angle SMO$ — линейный угол двугранного угла при ребре BC)

Для такого вида пирамид справедлива формула:

$$\boxed{S_{\text{бок}} = \frac{S_{\text{осн}}}{\cos\varphi}},$$

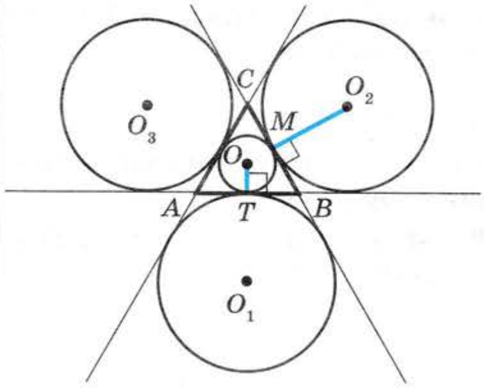
где $\varphi = \angle SMO$ — угол наклона всех боковых граней к основанию

3. Если все боковые грани пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания, то основанием высоты пирамиды является точка, равноудаленная от всех прямых, содержащих стороны основания.



Если в пирамиде $SABC$ грани SAB, SAC и SBC одинаково наклонены к плоскости основания ABC
(то есть $\angle SMO = \angle SKO = \angle SNO$ — соответствующие линейные углы равны) и $SO \perp$ пл. ABC,

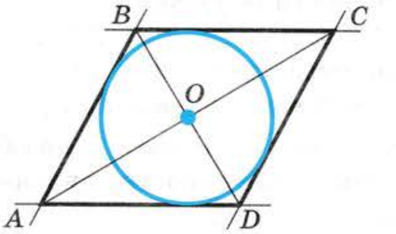
то O — точка, равноудаленная от прямых AB, BC и AC ($OK = OM = ON$).

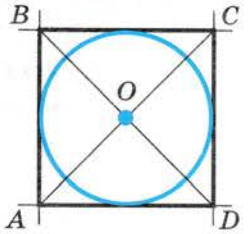


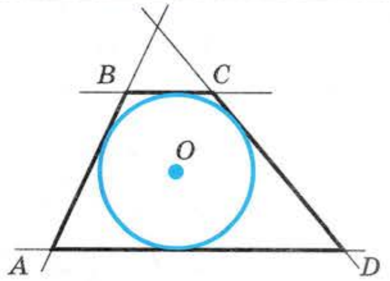
Для треугольника ABC точек, равноудаленных от прямых AB, BC и AC, четыре:
центр вписанной окружности — O;
три центра вневписанных окружностей — O_1, O_2, O_3.

$OT = r_{\text{впис}} = \dfrac{S_{\Delta ABC}}{p}$, где $p = \dfrac{a+b+c}{2}$

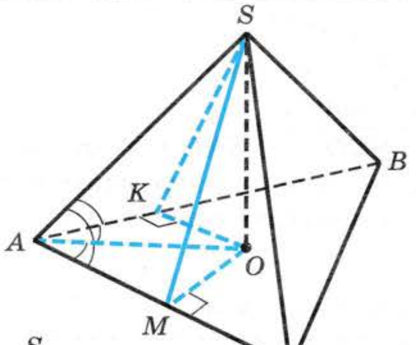
$O_2M = r_a = \dfrac{S_{\Delta ABC}}{p-a}$

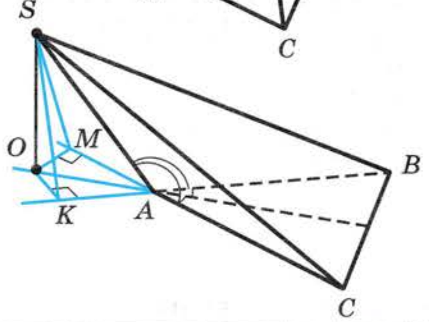






Для ромба (квадрата) и трапеции $ABCD$ точка, равноудаленная от прямых AB, BC, CD и AD, единственная — центр вписанной окружности O.





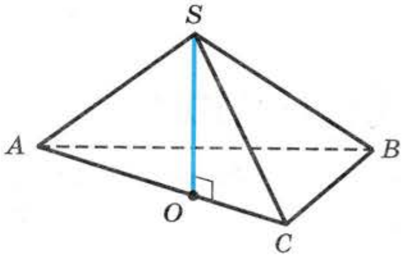
4. Если только две боковые грани пирамиды (или наклонной призмы) одинаково наклонены к основанию или общее боковое ребро этих граней образует равные углы со смежными с ним сторонами основания, то это общее боковое ребро проектируется на прямую, содержащую биссектрису угла между смежными с этим ребром сторонами основания (и наоборот).

Если в пирамиде $SABC$ грани SAB и SAC одинаково наклонены к основанию ABC (то есть $\angle SKO = \angle SMO$) или $\angle SAB = \angle SAC$ и $SO \perp$ пл. ABC,

то AO — биссектриса $\angle BAC$ (или прямая AO содержит биссектрису $\angle BAC$).

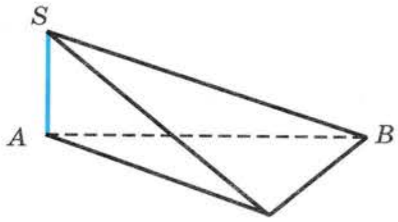
Если в пирамиде $SABC$
$SO \perp$ пл. ABC и AO — **биссектриса** $\angle BAC$
(или прямая AO содержит биссектрису $\angle BAC$),

то $\angle SKO = \angle SMO$ (грани SAB и SAC одинаково наклонены к основанию) и $\angle SAB = \angle SAC$.



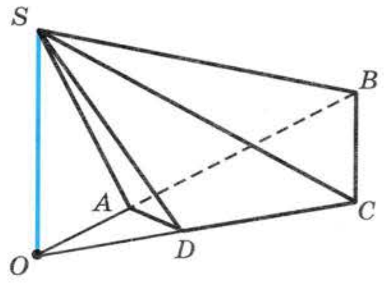
5. **Если** только одна боковая грань пирамиды перпендикулярна плоскости основания,
то высотой пирамиды будет высота этой грани.

Если в пирамиде $SABC$ пл. $SAC \perp$ пл. ABC и $SO \perp AC$ ($O \in AC$),
то SO **— высота пирамиды** ($SO \perp$ **пл.** ABC).



6. **Если** две смежные боковые грани пирамиды перпендикулярны плоскости основания,
то высотой пирамиды будет их общее боковое ребро.

Если пл. $SAB \perp$ пл. ABC и пл. $SAC \perp$ пл. ABC,
то SA **— высота пирамиды** ($SA \perp$ **пл.** ABC).

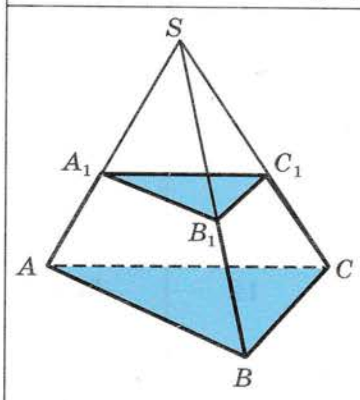


7. **Если** две несмежные боковые грани пирамиды перпендикулярны плоскости основания,
то высотой пирамиды будет отрезок прямой, по которой пересекаются плоскости этих граней.

Если пл. $SAB \perp$ пл. $ABCD$, пл. $SCD \perp$ пл. $ABCD$ и пл. SAB пересекает пл. SCD по прямой SO ($O \in$ пл. $ABCD$),
то SO **— высота пирамиды.**

Таблица 51

УСЕЧЕННАЯ ПИРАМИДА

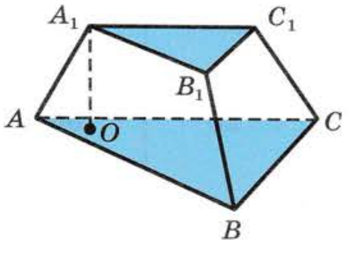


Определение усеченной пирамиды

Если задана пирамида $SABC$ и проведена плоскость $A_1B_1C_1$, параллельная основанию пирамиды (пл. $A_1B_1C_1 \parallel$ пл. ABC), то эта плоскость отсекает от данной пирамиды пирамиду $SA_1B_1C_1$, подобную данной (с коэффициентом подобия $K = \frac{SA_1}{SA} = \frac{A_1B_1}{AB}$).

Другую часть данной пирамиды — многогранник $ABCA_1B_1C_1$ — называют ***усеченной пирамидой***.

Грани ABC и $A_1B_1C_1$ — основания (пл. $ABC \parallel$ пл. $A_1B_1C_1$)
Трапеции ABB_1A_1, BCC_1B_1, ACC_1A_1 — боковые грани



Высотой усеченной пирамиды называют расстояние между плоскостями ее оснований.

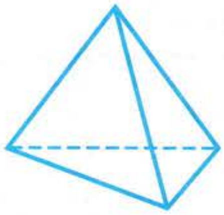
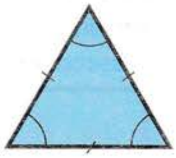
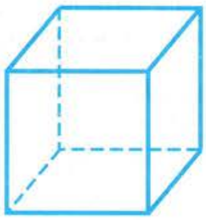
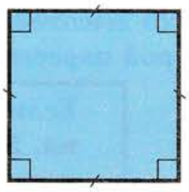
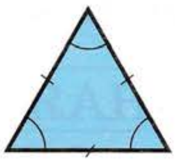
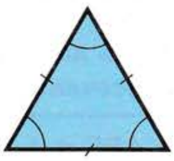
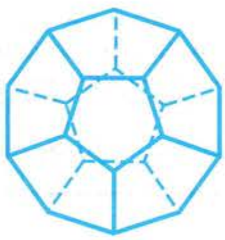
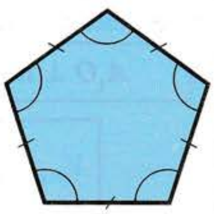
$A_1O \perp$ пл. ABC	$A_1O = H$ — высота

$$\boxed{V_{\text{усеч. пирамиды}} = \frac{1}{3} H \left(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1S_2}\right)},$$

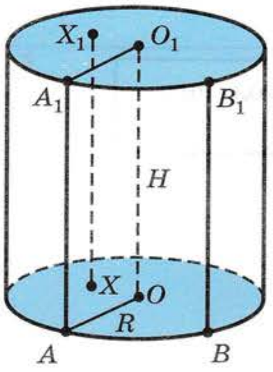
где S_1, S_2 — площади оснований

Таблица 52

ПРАВИЛЬНЫЕ МНОГОГРАННИКИ

№	Тип правильного многогранника	Форма грани	Число граней	Число вершин	Число ребер
1	Тетраэдр (четырехгранник) 		4	4	6
2	Гексаэдр (шестигранник), или куб 		6	8	12
3	Октаэдр (восьмигранник) 		8	6	12
4	Икосаэдр (двадцатигранник) 		20	12	30
5	Додекаэдр (двенадцатигранник) 		12	20	30

ЦИЛИНДР



Определение. ***Цилиндром (круговым цилиндром)*** называют тело, состоящее из двух кругов, не лежащих в одной плоскости и совмещаемых параллельным переносом, и всех отрезков, соединяющих соответствующие точки этих кругов.

Круги — основания цилиндра

Отрезки, соединяющие соответствующие точки окружностей кругов, — **образующие**.

AA_1; BB_1 — образующие цилиндра

Цилиндр называют **прямым**, если его образующие перпендикулярны плоскостям основания.

В школьных учебниках:

цилиндр = прямой круговой цилиндр

Свойства

1. Основания цилиндра равны и параллельны.

$OA = O_1A_1 = R$	пл. $AOB \parallel$ пл. $A_1O_1B_1$

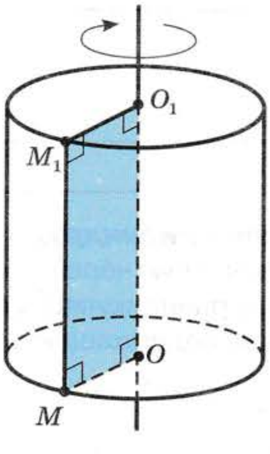
O — центр нижнего основания,
O_1 — центр верхнего основания.

2. Образующие цилиндра параллельны и равны.

$AA_1 \parallel BB_1$	$AA_1 = BB_1$

3. Высота цилиндра (расстояние между плоскостями оснований) равна образующей.

$H_{цил} = AA_1 = OO_1$



4. При вращении прямоугольника вокруг его стороны как оси образуется цилиндр.

OMM_1O_1 — прямоугольник

OO_1 — ось образованного цилиндра ($OO_1 \parallel MM_1$).

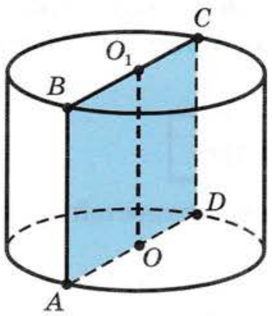
$R_{цил} = OM = O_1M_1$	$H_{цил} = MM_1 = OO_1$

5. $S_{осн.\ цил} = \pi R^2$ | $S_{бок.\ цил} = 2\pi RH$ | $S_{полн} = S_{бок} + 2S_{осн} = 2\pi R\,(H + R)$

6. $V_{цил} = S_{осн} \cdot H = \pi R^2 H$

СЕЧЕНИЯ ЦИЛИНДРА ПЛОСКОСТЯМИ

Осевое сечение цилиндра



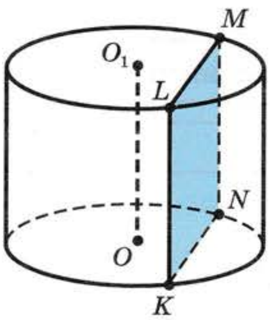
$ABCD$ — осевое сечение (сечение, проходящее через ось OO_1).

$ABCD$ — прямоугольник

$AD = d_{\text{осн}} = 2R$	$AB = H_{\text{цил}}$

AB и CD — образующие цилиндра

Сечение цилиндра плоскостью, параллельной его оси



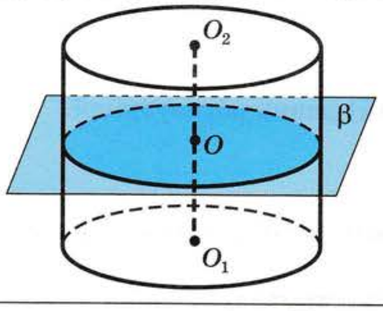
пл. $KLMN \parallel OO_1$

$KLMN$ — прямоугольник

KL и MN — образующие цилиндра

$KL = H_{\text{цил}}$

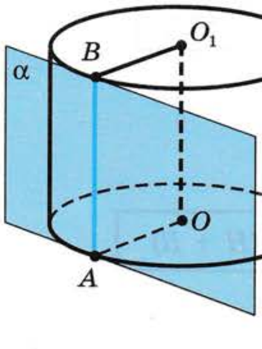
Сечение цилиндра плоскостью, параллельной его основаниям



Плоскость, параллельная плоскости основания цилиндра, пересекает его боковую поверхность по окружности, равной окружности основания

$R_{\text{сеч}} = R_{\text{цил}}$

Плоскость, касательная к цилиндру



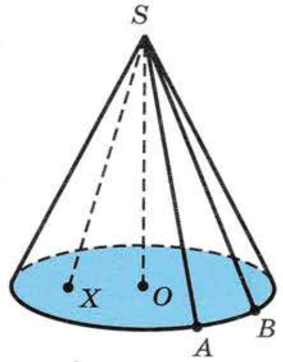
Определение. ***Плоскостью, касательной к цилиндру,*** называют плоскость, проходящую через образующую цилиндра и перпендикулярную плоскости осевого сечения, содержащей эту образующую.

α — касательная плоскость к цилиндру

AB — образующая, α проходит через AB

$\alpha \perp$ пл. AOO_1B

КОНУС



Определение. ***Конусом (круговым конусом)*** называют тело, состоящее из круга, точки, не лежащей в плоскости этого круга, и всех отрезков, соединяющих данную точку с точками круга.

Круг — основание конуса
Точка S — вершина конуса

Отрезки, соединяющие вершину конуса с точками окружности основания, — ***образующие конуса.***

SA; SB — образующие конуса

Конус называют ***прямым***, если $SO \perp$ пл. AOB (O — центр круга основания).

В школьных учебниках:

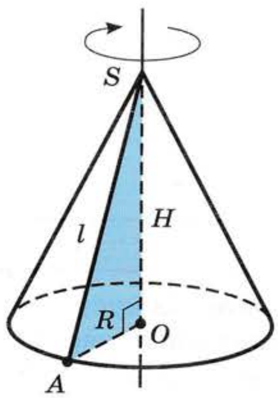
конус = прямой круговой конус

Свойства

1. Образующие конуса равны.

$$SA = SB = \ldots$$

2. $H_{\text{кон}} = SO \qquad (SO \perp \text{пл. } AOB)$



3. При вращении прямоугольного треугольника вокруг его катета как оси образуется конус.

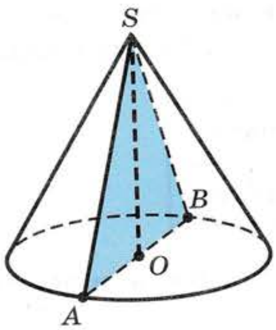
$\Delta\, AOS$ — прямоугольный, $\angle\, AOS = 90°$	
Прямая SO — ось конуса	
$R_{\text{кон}} = AO$	$H_{\text{кон}} = SO$
AS — образующая, $AS = l$	

4. $S_{\text{осн. кон}} = \pi R^2$ $\qquad$ $S_{\text{бок. кон}} = \pi R l$ $\qquad$ $S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{\text{осн}} = \pi R\,(l + R)$

5. $V_{\text{кон.}} = \frac{1}{3} S_{\text{осн}} \cdot H = \frac{1}{3}\pi R^2 H$

СЕЧЕНИЯ КОНУСА ПЛОСКОСТЯМИ

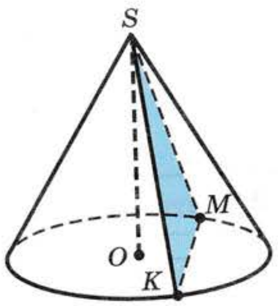
Осевое сечение конуса



$\Delta\ SAB$ — осевое сечение (сечение, проходящее через ось SO)

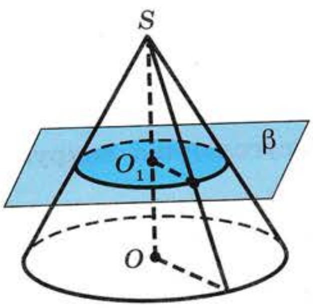
$\Delta\ SAB$ — равнобедренный
$SA = SB$ (SA и SB — образующие)

Сечение конуса плоскостью, проходящей через его вершину



$\Delta\ SMK$ — равнобедренный
$SM = SK$ (SM и SK — образующие)

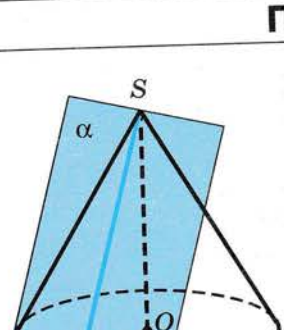
Сечение конуса плоскостью, параллельной его основанию



Плоскость, параллельная плоскости основания конуса, пересекает конус по кругу, а боковую поверхность — по окружности с центром на оси конуса.

$$\boxed{\frac{R_{сеч}}{R_{кон}} = \frac{SO_1}{SO}}$$

Плоскость, касательная к конусу

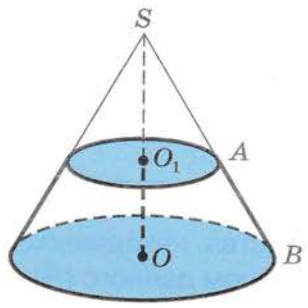


Определение. ***Плоскостью, касательной к конусу,*** называют плоскость, проходящая через образующую конуса и перпендикулярная плоскости осевого сечения, содержащей эту образующую.

α — плоскость, касательная к конусу
SA — образующая, α проходит через SA, $\alpha \perp$ пл. SAO

УСЕЧЕННЫЙ КОНУС

Определение усеченного конуса



Если в данном конусе (с вершиной S и кругом основания с центром O) проведена плоскость, параллельная его основанию и пересекающая конус, то эта плоскость отсекает от него меньший конус (с вершиной S и кругом основания с центром O_1). Оставшуюся часть данного конуса называют ***усеченным конусом*** (на рисунке выделен жирной линией).

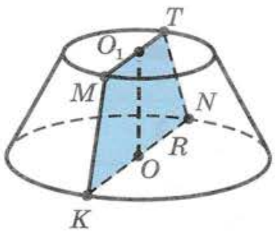
Высотой усеченного конуса называют расстояние между плоскостями его оснований.

В частности,

$$\boxed{OO_1 = H_{\text{усеч. кон}}},$$

где O и O_1 — центры оснований усеченного конуса.

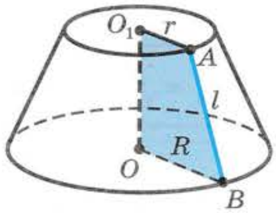
Свойства



1. Осевое сечение усеченного конуса — равнобокая трапеция.

$MKNT$ — осевое сечение	$MT \parallel KN$, $MK = TN$ (образующие)

$MT = 2r$, $KN = 2R$	$OO_1 \perp KN$; $OO_1 = H$



2. При вращении прямоугольной трапеции ($OBAO_1$) вокруг оси, проходящей через боковую сторону, перпендикулярную основаниям, образуется усеченный конус.

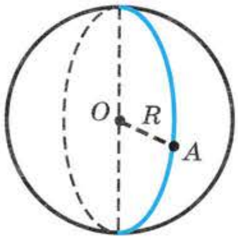
3. $\boxed{S_{\text{бок. усеч. кон}} = \pi (R + r)\, l}$, где R и r — радиусы нижнего и верхнего оснований, $l = AB$ — образующая.

$$\boxed{S_{\text{полн}} = S_{\text{бок}} + S_{1\text{ осн}} + S_{2\text{ осн}} = \pi (R + r)\, l + \pi R^2 + \pi r^2}$$

4. $\boxed{V_{\text{усеч. конуса}} = \frac{1}{3}\pi H (R^2 + Rr + r^2)}$

Таблица 58

СФЕРА И ШАР

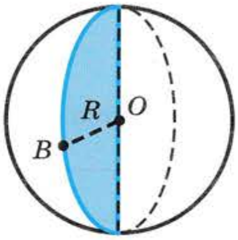


Определение. ***Сферой*** называют тело, состоящее из всех точек пространства, находящихся на данном расстоянии (R) от данной точки (O).

O — центр сферы; OA — радиус сферы, $OA = R$

При вращении полуокружности вокруг ее диаметра получаем сферу.

$S_{сф} = 4\pi R^2$



Определение. ***Шаром*** называют тело, состоящее из всех точек пространства, находящихся на расстоянии, не большем данного (R), от данной точки (O).

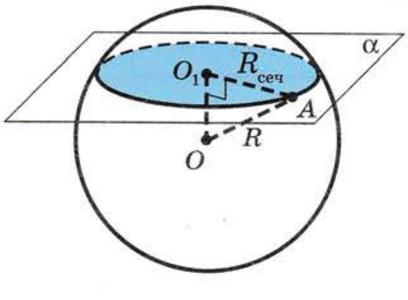
O — центр шара; OB — радиус шара, $OB = R$

При вращении полукруга вокруг его диаметра получаем шар.

$V_{шара} = \frac{4}{3}\pi R^3$

Таблица 59

СЕЧЕНИЕ ШАРА ПЛОСКОСТЬЮ

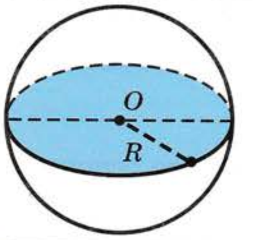


Всякое сечение шара плоскостью есть круг

Центр этого круга — основание перпендикуляра, опущенного из центра шара на секущую плоскость

O — центр шара; O_1 — центр круга сечения.

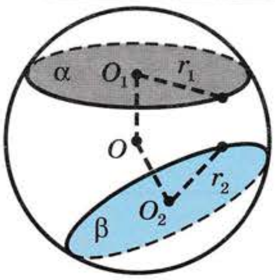
$OO_1 \perp \alpha$ Из $\Delta\, OO_1A$ $R_{сеч.} = \sqrt{R^2_{шара} - OO_1^2}$



Сечение, проходящее через центр шара, называют ***большим кругом.***

$R_{бол.\ кр} = R_{шара}$

Сечение шара двумя плоскостями



$OO_1 \perp \alpha$; $OO_2 \perp \beta$; r_1 и r_2 — радиусы кругов сечений.

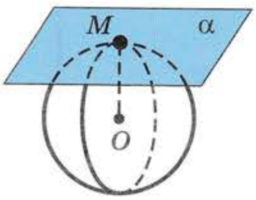
$OO_1 = OO_2 \Leftrightarrow r_1 = r_2$

$OO_1 < OO_2 \Leftrightarrow r_1 > r_2$

$OO_1 > OO_2 \Leftrightarrow r_1 < r_2$

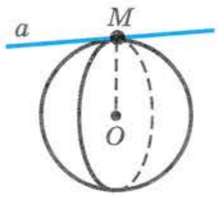
ПЛОСКОСТЬ И ПРЯМАЯ, КАСАТЕЛЬНЫЕ К ШАРУ (СФЕРЕ)

Касательная плоскость



Определение. Плоскость, имеющую с шаром (сферой) только одну общую точку, называют ***касательной плоскостью***.

Касательная прямая



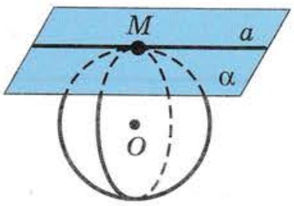
Определение. Прямую, имеющую с шаром (сферой) только одну общую точку, называют ***касательной к шару (сфере)***.

Свойства

1. Касательная плоскость (прямая) перпендикулярна радиусу шара (сферы), проведенному в точку касания.
   И наоборот: если плоскость (прямая) проходит через точку сферы и перпендикулярна радиусу, проведенному в эту точку, то она касается сферы.

α — касательная плоскость, M — точка касания	$\Leftrightarrow$	$OM \perp \alpha$ (OM — радиус шара)
a — касательная прямая, M — точка касания	$\Leftrightarrow$	$OM \perp a$ (OM — радиус шара)

2. Прямая, касательная к шару, лежит в касательной плоскости, проведенной через точку касания.



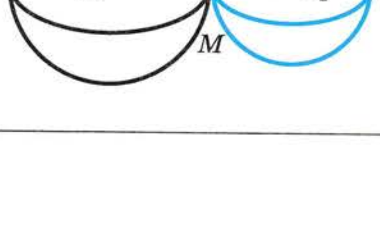
α касается шара в точке M, a касается шара в точке M
a лежит в плоскости α

Касание двух сфер

Определение. Две сферы называют ***касательными друг к другу***, если они имеют только одну общую точку.

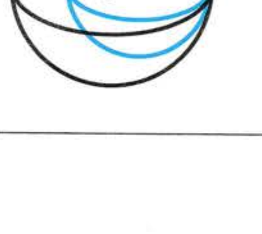
Внешнее касание

Сфера (1) касается сферы (2) в точке M $\Leftrightarrow$ $M \in O_1O_2$, $O_1O_2 = R_1 + R_2$

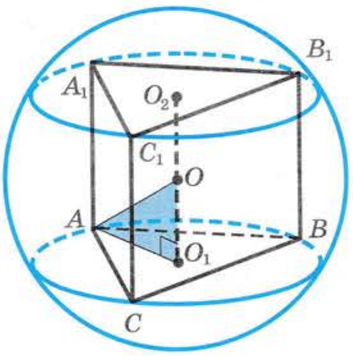


Внутреннее касание

Сфера (1) касается сферы (2) в точке M $\Leftrightarrow$ $M \in O_1O_2$, $O_1O_2 = R_1 - R_2$



ШАР, ОПИСАННЫЙ ОКОЛО ПРИЗМЫ



Определение. Шар называют ***описанным около призмы***, если все вершины призмы лежат на поверхности шара.

O — центр описанного шара,
$OA = OB = OC = OA_1 = OB_1 = OC_1 = R_{\text{опис. шара}}$

Свойства

1. **Шар можно описать только около прямой призмы, вокруг основания которой можно описать окружность.**

2. **Центр шара, описанного около прямой призмы, лежит на середине отрезка, соединяющего центры окружностей, описанных около оснований призмы.**

Если в призме $ABCA_1B_1C_1$:
O_1 — центр окружности, описанной около основания ABC,
O_2 — центр окружности, описанной около основания $A_1B_1C_1$,
и O — середина отрезка O_1O_2,

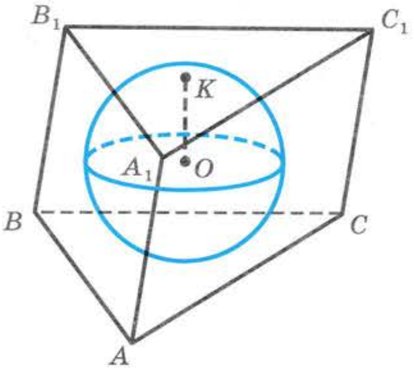
то O — центр описанного шара
($OA = OB = OC = OA_1 = OB_1 = OC_1 = R_{\text{оп. ш.}}$)

Для решения обычно используют прямоугольный $\Delta\, AOO_1$, в котором

$AO = R_{\text{оп.}}$ — радиус описанного шара
$AO_1 = R_{\text{окр}}$ — радиус окружности, описанной около основания

$$OO_1 = \frac{1}{2}AA_1 = \frac{1}{2}H_{\text{призмы}}$$

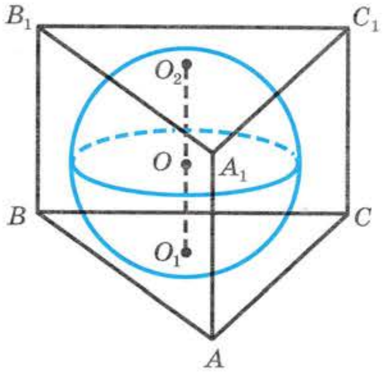
ШАР, ВПИСАННЫЙ В ПРИЗМУ



Определение. Шар называют ***вписанным в призму***, если все грани призмы касаются этого шара.

O — центр вписанного шара,
K — точка касания с гранью $A_1B_1C_1$,
$OK = r_{\text{впис. шара}}$ $(OK \perp \text{пл. } A_1B_1C_1)$

1. Прямая призма

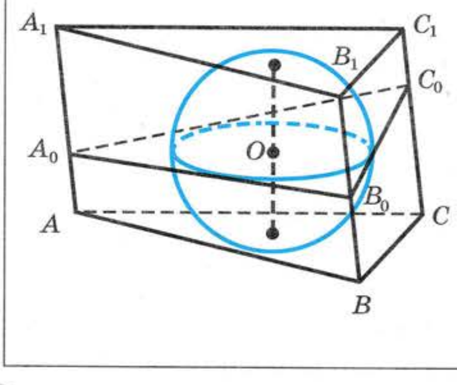


Центр шара, вписанного в прямую призму, лежит в середине отрезка, соединяющего центры окружностей, вписанных в основания призмы. Причем радиус шара равен радиусу окружности, вписанной в основание призмы, а диаметр шара — высоте призмы.

Если $ABCA_1B_1C_1$ — прямая призма,
O_1 — центр окружности, вписанной в основание ABC,
O_2 — центр окружности, вписанной в основание $A_1B_1C_1$,
O — середина отрезка O_1O_2,

то O — центр вписанного шара,
$r_{\text{впис. шара}} = r_{\text{окр., впис. в основание}}$,
$d_{\text{впис. шара}} = H_{\text{призмы}}$.

2. Наклонная призма

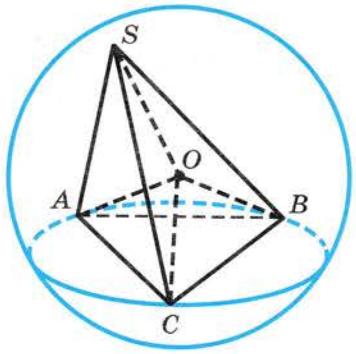


Если в наклонную призму вписан шар, то радиус шара равен радиусу окружности, вписанной в перпендикулярное сечение призмы, а диаметр шара равен высоте призмы.

Если в призму $ABCA_1B_1C_1$ вписан шар и $A_0B_0C_0$ — перпендикулярное сечение (пл. $A_0B_0C_0 \perp AA_1$),

то $r_{\text{впис. шара}} = r_{\text{шар, впис. в перп. сеч. } A_0B_0C_0}$,
$d_{\text{впис. шара}} = H_{\text{призмы}}$

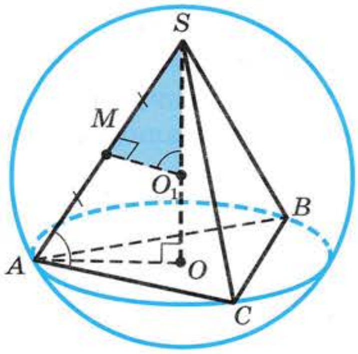
ШАР, ОПИСАННЫЙ ОКОЛО ПИРАМИДЫ



Определение. Шар называют ***описанным около пирамиды,*** если все вершины пирамиды лежат на поверхности шара.

O — центр описанного шара, $OA = OB = OC = SO = R_{\text{опис. шара}}$

1. Пирамида, у которой основанием высоты является центр описанной около основания окружности



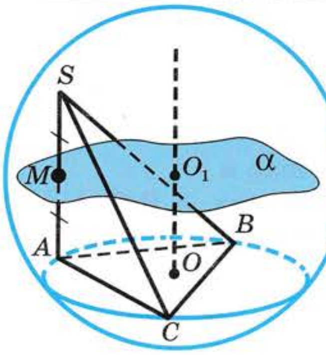
SO — высота пирамиды $SABC$, O — центр окружности, описанной около основания пирамиды
M — середина ребра SA, $MO_1 \perp SA$ (в плоскости ASO), MO_1 пересекает прямую SO в точке O_1
O_1 — центр описанного шара
$SO_1 = R_{\text{опис. шара}}$
$AO = R_{\text{окр., опис. около основания}}$

В такой пирамиде центр описанного шара лежит на прямой, содержащей высоту пирамиды, в точке пересечения этой прямой со серединным перпендикуляром к боковому ребру.

Пути решения:

1) Учитывая, что $\angle SO_1M = \angle SAO$, вычисляем элементы прямоугольных $\Delta\, SAO$ и $\Delta\, SMO_1$...
2) Учитывая, что $\Delta\, SMO_1 \sim \Delta\, SAO$, записываем соответствующие пропорции...

2. Произвольная пирамида



Центр шара, описанного около произвольной пирамиды, лежит на прямой, перпендикулярной плоскости основания, проходящей через центр окружности, описанной около основания, в точке пересечения этой прямой с плоскостью, перпендикулярной боковому ребру и проходящей через его середину.

O — центр окружности, описанной около основания	
$OO_1 \perp$ пл. ABC	
M — середина ребра SA	$\alpha \perp SA$ $(M \in \alpha)$
α пересекает OO_1 в точке O_1, O_1 — центр описанного шара	

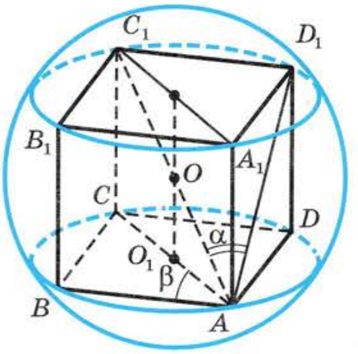
ШАР, ОПИСАННЫЙ ОКОЛО ПРЯМОУГОЛЬНОГО ПАРАЛЛЕЛЕПИПЕДА И ПРАВИЛЬНОЙ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНОЙ ПИРАМИДЫ

1. Шар, описанный около прямоугольного параллелепипеда

1. **Около произвольного прямоугольного параллелепипеда можно описать шар (сферу). Центром шара (сферы), описанного около прямоугольного параллелепипеда, является точка пересечения его диагоналей, а каждая диагональ параллелепипеда является диаметром описанного шара (сферы).**
2. **Если около параллелепипеда можно описать сферу, то этот параллелепипед — прямоугольный.**

Задача 1. В шар радиусом R вписан прямоугольный параллелепипед, диагональ которого образует с меньшей гранью угол α. Диагональ основания параллелепипеда образует с большей стороной основания угол β. **Найдите размеры параллелепипеда.**

Решение



Покажем, что центром шара, описанного около прямоугольного параллелепипеда, является точка пересечения его диагоналей, а каждая диагональ параллелепипеда — диаметр описанного шара. Пусть O — точка пересечения диагоналей прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (см. рисунок). Поскольку все диагонали прямоугольного параллелепипеда равны и точкой пересечения (точкой O) делятся пополам, то точка O равноудалена от всех вершин прямоугольного параллелепипеда, то есть является центром описанного шара, а каждая диагональ прямоугольного параллелепипеда является диаметром этого шара (например, $AC_1 = 2R$).

Учитывая, что в прямоугольном параллелепипеде $C_1D_1 \perp$ пл. AA_1D_1D, получаем, что AD_1 — проекция AC_1 на плоскость AA_1D_1D. Следовательно, $\angle C_1AD_1$ — угол наклона диагонали AC_1 к пл. AA_1D_1D, и если AA_1D_1D — меньшая грань, то по условию $\angle C_1AD_1 = \alpha$. Если AA_1D_1D — меньшая боковая грань, то AD — меньшая сторона основания (а сторона AB соответственно бóльшая). Тогда по условию $\angle CAB = \beta$. Из прямоугольного треугольника AC_1D_1: $C_1D_1 = AC_1 \sin\alpha = 2R\sin\alpha$. Но $AB = C_1D_1 = 2R\sin\alpha$. Тогда из прямоугольного ΔABC: $CB = AB\operatorname{tg}\beta = 2R\sin\alpha\operatorname{tg}\beta$.

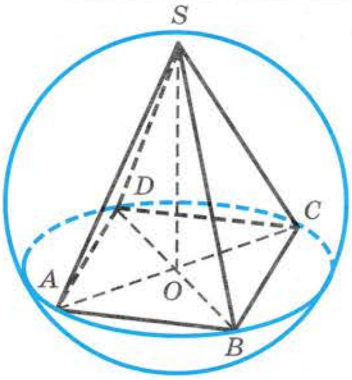
Квадрат диагонали прямоугольного параллелепипеда равен сумме квадратов трех его измерений, то есть $AC_1{}^2 = AB^2 + BC^2 + BB_1{}^2$. Отсюда $BB_1 = \sqrt{AC_1^2 - AB^2 - BC^2} =$

$$= 2R\sqrt{1-\sin^2\alpha - \sin^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta} = 2R\sqrt{\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\operatorname{tg}^2\beta}$$

2. Шар, описанный около правильной четырехугольной пирамиды

1. **Около любой правильной пирамиды можно описать шар (сферу). Центр шара (сферы), описанного около правильной пирамиды, лежит на оси пирамиды** (то есть на прямой, содержащей высоту правильной пирамиды).
2. **Радиус шара (сферы), описанного около правильной четырехугольной пирамиды, равен радиусу окружности, описанной около диагонального сечения пирамиды** (диагональное сечение пирамиды — это сечение пирамиды, проходящее через вершину пирамиды и диагональ основания).

Задача 1. Сторона основания правильной четырехугольной пирамиды равна 6. Боковое ребро пирамиды наклонено к плоскости основания под углом 60°. Вычислить площадь S сферы, описанной около пирамиды.



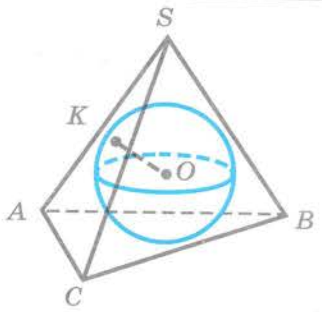
Пусть $SABCD$ (см. рисунок) — заданная правильная пирамида с высотой SO. Поскольку основанием высоты правильной пирамиды является центр ее основания, то O — точка пересечения диагоналей квадрата $ABCD$. Тогда AO — проекция бокового ребра SA на плоскость основания $ABCD$, следовательно, $\angle SAO$ — угол между боковым ребром SA и плоскостью основания, то есть $\angle SAO = 60°$. Центр сферы, описанной около правильной пирамиды, лежит на оси SO. Рассмотрим диагональное сечение SAC. Так как это сечение проходит через центр шара, то в сечении получим большой круг (радиус которого равен радиусу сферы), описанный около треугольника SAC.

По условию $AB = 6$, тогда $AC = 6\sqrt{2}$ (как диагональ квадрата). В треугольнике SAC: $SA = SC$ (как боковые ребра правильной пирамиды) и $\angle SAC = 60°$, тогда ΔSAC — правильный.

Следовательно, $R_{\text{опис. сферы}} = R_{\text{опис. окружности}} = \dfrac{SC}{\sqrt{3}} = \dfrac{6\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{6}$.

Получаем $S_{\text{опис. сферы}} = 4\pi R^2 = 96\pi$.

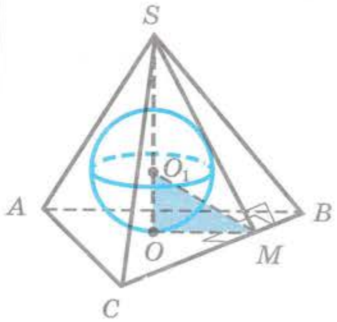
ШАР, ВПИСАННЫЙ В ПИРАМИДУ



Определение. Шар называют ***вписанным в пирамиду,*** если все грани пирамиды касаются этого шара.

O — центр вписанного шара,
K — точка касания к грани SAC,
$OK = r_{\text{впис. шара}}$ ($OK \perp$ пл. SAC)

1. Пирамида, у которой основание высоты — центр вписанной в основание окружности



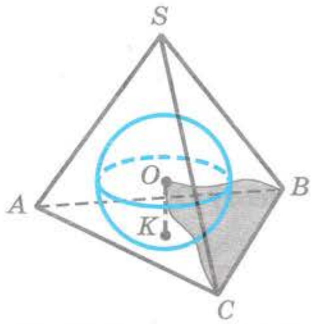
SO — высота пирамиды $SABC$
(O — центр окружности, вписанной в основание)
$\angle SMO$ линейный — ($OM \perp BC$, $SM \perp BC$)
MO_1 — биссектриса $\angle SMO$, MO_1 пересекает SO в точке O_1
O_1 — центр вписанного шара
$OO_1 = r_{\text{впис. шара}}$
$OM = r_{\text{окр., впис. в основание}}$

В такой пирамиде центр вписанного шара лежит на высоте пирамиды в точке пересечения высоты с биссектрисой линейного угла двугранного угла при основании.

Пути решения:

1) $\angle OMO_1 = \frac{1}{2}\angle SMO$. Рассматриваем прямоугольные $\Delta\ OMO_1$ и $\Delta\ SOM$...;
2) поскольку MO_1 — биссектриса $\Delta\ SMO$, то $\frac{SO_1}{OO_1} = \frac{SM}{OM}$ ...;
3) $r_{\text{впис.шара}} = \frac{3V_{\text{пир}}}{S_{\text{полн. пир}}}$.

2. Произвольная пирамида



$$r_{\text{впис.шара}} = \frac{3V_{\text{пир}}}{S_{\text{полн. пир}}}.$$

Центр шара, вписанного в произвольную пирамиду, лежит в точке пересечения биссекторных плоскостей двугранных углов при ребрах пирамиды.
Достаточно рассмотреть три биссекторные плоскости.
O — центр вписанного шара, пл. BCO — биссекторная плоскость двугранного угла при ребре BC.

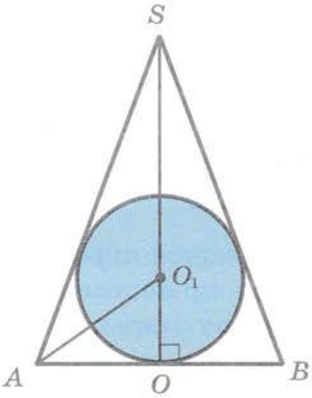
$OK \perp$ пл. ABC	$OK = r_{\text{впис. шара}}$

РЕШЕНИЕ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА КОМБИНАЦИЮ ТЕЛ ВРАЩЕНИЯ

Ориентир. При решении задач на комбинации тел вращения часто удобно рассматривать осевое сечение данной комбинации.

Задача 1. Образующая конуса равна 10 см, высота конуса 8 см. Найдите объем шара, вписанного в конус.

Решение*



Рассмотрим осевое сечение комбинации данных тел. Осевым сечением конуса будет равнобедренный треугольник SAB, основание которого равно диаметру основания конуса, высота SO — высоте конуса, а боковая сторона — образующей конуса. Осевым сечением шара будет круг, радиус которого равен радиусу шара. Так как шар вписан в конус, то круг будет вписан в треугольник.

По условию $SA = SB = 10$ см, $SO = 8$ см. Тогда из прямоугольного треугольника SAO: $AO = \sqrt{SA^2 - SO^2} = \sqrt{100-64} = 6$ (см).

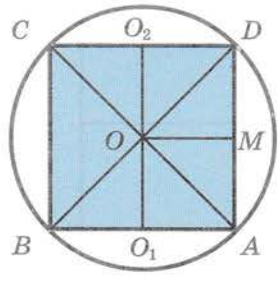
Центр вписанного круга (окружности) O_1 лежит в точке пересечения биссектрис углов треугольника (табл. 25). В равнобедренном треугольнике SAB высота SO является одновременно биссектрисой и медианой (табл. 5).

Следовательно, O_1 лежит на высоте SO и AO_1 — биссектрисе угла A. Тогда OO_1 — радиус вписанной окружности (так как $OO_1 \perp AB$), а значит, и радиус шара, вписанного в конус. Пусть $OO_1 = x$ см. Тогда $SO_1 = SO - OO_1 = 8 - x$ (см). В треугольнике SAO AO_1 — биссектриса, тогда $\frac{SO_1}{OO_1} = \frac{SA}{AO}$ (табл. 8), то есть $\frac{8-x}{x} = \frac{10}{6}$. Отсюда $x = 3$ (см). Тогда $V_{\text{шара}} = \frac{4}{3}\pi OO_1^3 = \frac{4}{3}\pi \cdot 3^3 = 36\pi$ (см^3).

Ответ: 36π см^3.

Задача 2. В сферу радиуса R вписан цилиндр, образующая которого находится на расстоянии a от центра сферы. Найдите полную поверхность цилиндра.

Решение



Рассмотрим осевое сечение комбинации данных тел. Осевым сечением цилиндра является прямоугольник $ABCD$ (табл. 49), сторона AB которого равна диаметру основания цилиндра, а сторона AD — образующей цилиндра (а значит, и высоте цилиндра). Осевое сечение сферы представляет собой окружность (табл. 57), радиус которой равен радиусу сферы. Так как цилиндр вписан в сферу, то прямоугольник будет вписан в окружность (а окружность — описана около прямоугольника). Центр O окружности, описанной около прямоугольника, лежит в точке пересечения его диагоналей. Тогда OA — радиус описанной окружности, а значит, и радиус данной сферы, то есть $OA = R$. Проведем $OM \perp AD$, отсюда OM — расстояние от центра сферы до образующей AD, по условию $OM = a$. Учитывая, что $OO_1 \parallel AD$ (и O_1O — ось симметрии прямоугольника), получаем радиус основания цилиндра: $R_{\text{цил}} = AO_1 = OM = a$.

Из прямоугольного треугольника AO_1O (табл. 11): $OO_1 = \sqrt{AO^2 - AO_1^2} = \sqrt{R^2 - a^2}$. Так как точка пересечения диагоналей осевого сечения цилиндра делит его высоту O_1O_2 пополам, то высота цилиндра: $H_{\text{цил}} = O_1O_2 = 2OO_1 = 2\sqrt{R^2 - a^2}$. Тогда (табл. 51)

$$S_{\text{полн. цил}} = S_{\text{бок}} + 2S_{\text{осн}} = 2\pi R_{\text{цил}} \cdot H_{\text{цил}} + 2\pi R_{\text{цил}}^2 = 2\pi R_{\text{цил}}\left(H_{\text{цил}} + R_{\text{цил}}\right) = 2\pi a\left(2\sqrt{R^2 - a^2} + a\right).$$

Ответ: $2\pi a\left(2\sqrt{R^2 - a^2} + a\right)$

* В записи решения для удобства читателей дана ссылка на соответствующие таблицы, однако, оформляя решение стереометрических задач, необходимо записывать только содержание соответствующих опорных фактов.

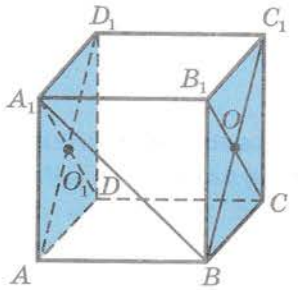
НАХОЖДЕНИЕ РАССТОЯНИЙ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ

I способ (по определению)

Определение. ***Расстоянием между скрещивающимися прямыми*** называют длину их общего перпендикуляра.

I способ

Ориентир. *Строим или выделяем общий перпендикуляр к двум данным скрещивающимся прямым.*

Задача 1	Решение
 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным единице, найти расстояние между скрещивающимися ребрами AA_1 и BC.	Так как ребро куба AB перпендикулярно к каждому из данных ребер ($AB \perp AA_1$ и $AB \perp BC$), то это и есть общий перпендикуляр, о котором идет речь в определении. Поэтому расстояние между скрещивающимися прямыми AA_1 и BC равно AB, а значит, равно единице.

II способ

Ориентир. ***Через одну из данных прямых проводим плоскость, параллельную другой прямой*** ***(для этого достаточно через точку одной прямой провести прямую, параллельную второй прямой, и найти расстояние от любой точки второй прямой к плоскости, которая проходит через пересекающиеся прямые).***

Задача 2	Решение
В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным единице, найти расстояние между скрещивающимися диагоналями боковых граней AD_1 и B_1C.	В плоскости грани BB_1C_1C проведем еще одну диагональ BC_1, параллельную AD_1 (поскольку четырехугольник ABC_1D_1 — прямоугольник), которая пересекает B_1C в точке O (см. рисунок к задаче 1). По признаку параллельности прямой и плоскости (табл. 35) плоскость BB_1C_1C (которая проходит через две пересекающиеся прямые BC_1 и B_1C) параллельна прямой AD_1. Так как расстояние между параллельными прямой и плоскостью везде одинаково, то его можно найти как расстояние от любой точки прямой AD_1, например от точки A, до плоскости BB_1C_1C (оно также равно и расстоянию между скрещивающимися прямыми AD_1 и B_1C). Учитывая, что ребро AB перпендикулярно к плоскости BB_1C_1C (так как $AB \perp BC$ и $AB \perp BB_1$), получаем, что расстояние от точки A до плоскости BB_1C_1C равно AB. Следовательно, расстояние между скрещивающимися прямыми AD_1 и B_1C равно единице.

III способ

Ориентир. ***Через данные прямые проводим параллельные плоскости*** *(для этого достаточно через точку одной прямой провести прямую, параллельную второй прямой, и рассмотреть плоскости, проходящие через пересекающиеся прямые)* ***или в данной конфигурации находим параллельные плоскости, которые проходят через данные скрещивающиеся прямые.***

Решение задачи 2

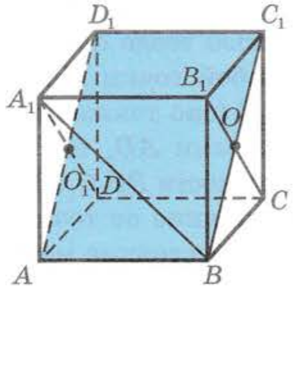
Поскольку у куба противоположные грани попарно параллельны, то грани AA_1D_1D и BB_1C_1C, которые проходят через данные скрещивающиеся прямые AD_1 и B_1C, параллельны. Расстояние между параллельными плоскостями везде одинаково, поэтому его можно найти как расстояние от любой точки плоскости AA_1D_1D до плоскости BB_1C_1C. Например, будем находить расстояние от точки A до плоскости BB_1C_1C (оно же равно и расстоянию между скрещивающимися прямыми AD_1 и B_1C). Учитывая, что ребро AB перпендикулярно к плоскости BB_1C_1C (так как $AB \perp BC$ и $AB \perp BB_1$), получаем, что расстояние от точки A до плоскости BB_1C_1C равно AB, то есть единице. Следовательно, расстояние между скрещивающимися прямыми AD_1 и B_1C равно единице.

IV способ

Ориентир. ***Расстояние между скрещивающимися прямыми равно расстоянию между их ортогональными проекциями на плоскость, перпендикулярную к одной из данных прямых*** *(при этом надо учитывать, что ортогональной проекцией прямой на плоскость, перпендикулярную ей, является точка пересечения этой прямой и плоскости).*

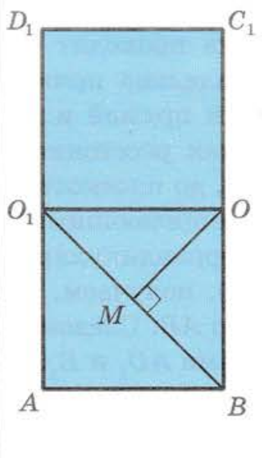
Задача 3

В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром, равным единице, найти расстояние между скрещивающимися диагоналями двух соседних граней.



Решение

Нам необходимо определить расстояние между скрещивающимися диагоналями двух соседних граней — пусть это будут диагонали A_1B и B_1C (см. рисунок). Для этого можно спроецировать данные прямые на плоскость ABC_1D_1, перпендикулярную прямой B_1C (поскольку $B_1C \perp BC_1$ и $B_1C \perp AB$, то $B_1C \perp ABC_1D_1$). В результате проектирования получим: $B_1C \to O$, $A_1B \to O_1B$ (O и O_1 — центры граней BCC_1B_1 и ADD_1A_1 соответственно).



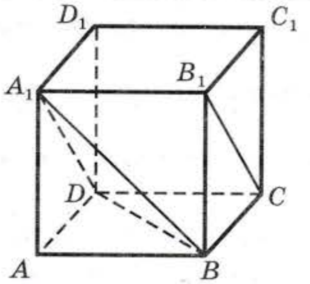
Рассмотрим выносной рисунок прямоугольника ABC_1D_1. По условию $AB = C_1D_1 = 1$. Тогда $BC_1 = AD_1 = \sqrt{2}$ (как диагонали квадрата со стороной 1). Нас интересует расстояние от точки O до прямой BO_1. Проведем $OM \perp BO_1$ и соединим точки O и O_1. Тогда OM — высота прямоугольного треугольника BOO_1, в котором $OO_1 = 1$, $BO = \frac{\sqrt{2}}{2}$, значит, $BO_1 = \sqrt{BO^2 + OO_1^2} = \sqrt{\frac{3}{2}}$. Запишем площадь треугольника BOO_1 двумя способами: с одной стороны, $S_{\Delta BOO_1} = \frac{1}{2} \cdot BO \cdot OO_1 = \frac{\sqrt{2}}{4}$; с другой стороны, $S_{\Delta BOO_1} = \frac{1}{2} \cdot BO_1 \cdot OM$. Отсюда $OM = \frac{2S_{\Delta BOO_1}}{BO_1} = \frac{1}{\sqrt{3}}$. Следовательно, расстояние между прямыми A_1B и B_1C равно длине отрезка OM, то есть $\frac{1}{\sqrt{3}}$.

НАХОЖДЕНИЕ УГЛОВ МЕЖДУ СКРЕЩИВАЮЩИМИСЯ ПРЯМЫМИ

I способ (по определению)

Определение. ***Углом между скрещивающимися прямыми*** называют угол между прямыми, которые пересекаются и параллельны данным скрещивающимся прямым.

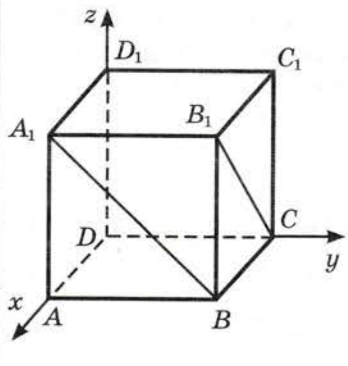
Ориентир. ***Через точку на одной из данных прямых проводим прямую, параллельную второй прямой.***

Задача 1	Решение
 В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ найдите угол между скрещивающимися прямыми A_1B и B_1C.	Так как $A_1D \parallel B_1C$ (как соответствующие диагонали противоположных граней куба), то по определению $\angle BA_1D$ — это угол между скрещивающимися прямыми A_1B и B_1C. В треугольнике BA_1D: $BA_1 = A_1D = BD$ (как диагонали граней куба), значит, это равносторонний треугольник, то есть $\angle BA_1D = 60°$.

II способ решения (использование векторов и координат)

Ориентир. Угол φ между прямыми, на которых лежат векторы $\vec{a}$ и $\vec{b}$, можно вычислять по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \qquad (*)$$

План	Решение
1. Выбрать два вектора, которые лежат на данных прямых.	Пусть $\overrightarrow{A_1B} = \vec{a}$, $\overrightarrow{B_1C} = \vec{b}$ и угол между прямыми A_1B и B_1C равен φ.
2. Ввести прямоугольную систему координат (или выбрать базисные векторы).	 Введем прямоугольную систему координат так, как на рисунке (начало координат — в вершине D куба, а оси координат направляем вдоль соответствующих ребер куба). Если $AD = a$, то координаты вершин куба, в которых находятся начало и конец выбранных векторов, равны: A_1 $(a;\ 0;\ a)$, B $(a;\ a;\ 0)$, B_1 $(a;\ a;\ a)$, C $(0;\ a;\ 0)$.
3. Найти координаты выбранных векторов.	Тогда $\overrightarrow{A_1B} = \vec{a} = \overrightarrow{(0;\ a;\ -a)}$, $\overrightarrow{B_1C} = \vec{b} = \overrightarrow{(-a;\ 0;\ -a)}$.
4. Найти $\cos\varphi$ по формуле (*) и записать величину угла φ.	$\cos\varphi = \frac{\lvert 0\cdot(-a)+a\cdot 0+(-a)\cdot(-a)\rvert}{\sqrt{0^2+a^2+(-a)^2}\cdot\sqrt{(-a)^2+0^2+(-a)^2}} = \frac{\lvert a^2\rvert}{\sqrt{2a^2}\cdot\sqrt{2a^2}} = \frac{a^2}{\sqrt{4a^4}} = \frac{a^2}{2a^2} = \frac{1}{2}$. Учитывая, что угол между скрещивающимися прямыми острый, получаем $\varphi = 60°$.

РЕШЕНИЕ СТЕРЕОМЕТРИЧЕСКИХ ЗАДАЧ НА ВЫЧИСЛЕНИЕ

Общие рекомендации

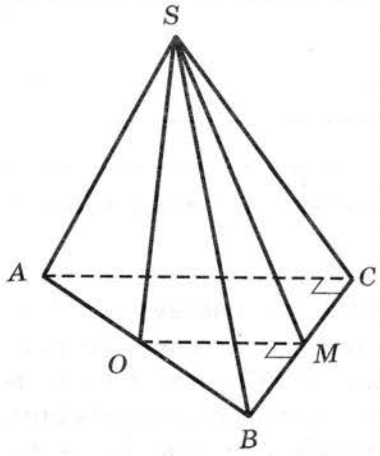
1. ***Изображение тел в пространстве необходимо выполнять с учетом свойств параллельного проектирования*** (см. табл. 37).
2. **В записи решения *нужно обосновывать только те утверждения, которые будут использованы в ходе дальнейшего решения.***

Ориентировочная схема решения и записи задач*

1. ***Обосновать положение высоты многогранника.***
2. ***Обосновать, что пространственные углы и расстояния обозначены правильно.***
3. ***Если рассматриваете сечение многогранника, то нужно обосновать его форму (если эту форму используете для решения).***
4. ***Если рассматриваете комбинацию многогранника и тела вращения, то нужно описать взаимное расположение их элементов.***
5. ***На каждом шаге вычислений нужно указать, из какого треугольника определяем элементы, и, если он прямоугольный, объяснить почему.***

Задача. В основании пирамиды $SABC$ лежит прямоугольный треугольник ABC с прямым углом C и углом A, равным α. Каждое боковое ребро пирамиды наклонено к плоскости основания под углом 60°. Найдите угол между плоскостью SBC и плоскостью основания пирамиды.

Решение



1. Поскольку все боковые ребра пирамиды одинаково наклонены к плоскости основания, то основанием высоты пирамиды будет центр окружности, описанной около основания пирамиды (табл. 50). Так как в основании пирамиды лежит прямоугольный треугольник, то основанием высоты SO пирамиды будет точка O — середина гипотенузы AB (табл. 25) (см. рисунок).
2. Углом наклона ребра SB к плоскости основания будет угол SBO (так как BO — проекция SB на плоскость ABC) (табл. 39); следовательно $\angle SBO = 60°$.
3. Проведем в плоскости основания $OM \perp BC$. Тогда $SM \perp BC$ по теореме о трех перпендикулярах (табл. 40). Значит, $\angle SMO$ — линейный угол двугранного угла при ребре BC (а так как он острый, то это и есть угол между плоскостями SBC и ABC) (табл. 42).
4. Пусть $AB = x$ $(x > 0)$. Тогда $OB = \frac{AB}{2} = \frac{x}{2}$.
5. В прямоугольном треугольнике SOB $\angle SBO = 60°$. Отсюда $SO = OB \cdot \operatorname{tg} 60° = \frac{x\sqrt{3}}{2}$.
6. В прямоугольном треугольнике OBM $\angle B = 90° - \alpha$, следовательно,

$$OM = OB \cdot \sin B = \frac{x}{2}\sin(90° - \alpha) = \frac{x}{2}\cos\alpha.$$

7. Из прямоугольного треугольника SMO (SO — высота пирамиды):

$$\operatorname{tg}\angle SMO = \frac{SO}{OM} = \frac{\frac{x\sqrt{3}}{2}}{\frac{x}{2}\cos\alpha} = \frac{\sqrt{3}}{\cos\alpha}. \text{ Тогда } \angle SMO = \operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{\cos\alpha}\right).$$

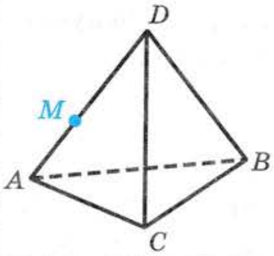
Ответ: $\operatorname{arctg}\left(\frac{\sqrt{3}}{\cos\alpha}\right)$.

---

* Основные этапы этой схемы можно использовать и в решении задач на вычисление для тел вращения.

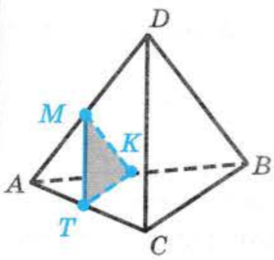
РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ НА ПОСТРОЕНИЕ СЕЧЕНИЙ МНОГОГРАННИКОВ

Задачи, для решения которых используются свойства параллельных прямых и плоскостей



Задача 1. В пирамиде $ABCD$ через данную точку M на ребре AD **проведите плоскость, параллельную плоскости грани DBC.**

Решение



1. *Анализ.* Допустим, что задача решена и соответствующее сечение MKT построено. Так как пл. $MKT \parallel$ пл. DBC, то грани ADC и ADB пересекают параллельные плоскости по параллельным прямым. Значит, $MK \parallel DB$ и $MT \parallel DC$. Это дает возможность выполнить построение.

2. *Построение.* Проведем через точку M в плоскости ADC прямую $MT \parallel DC$ ($T \in AC$), а в плоскости ADB — прямую $MK \parallel DB$ ($K \in AB$) и соединим точки T и K. Тогда MKT — искомое сечение.

3. *Доказательство.* По построению $MT \parallel DC$ и $MK \parallel DB$, тогда пл. $MKT \parallel$ пл. DBC (по признаку параллельности плоскостей).

4. *Исследование.* Задача всегда имеет единственное решение (так как каждый шаг решения можно выполнить однозначно).

Комментарий

В задачах на построение в стереометрии иногда удобно использовать схему решения задач на построение, известную из курса планиметрии: 1) *анализ*; 2) *построение*; 3) *доказательство*; 4) *исследование*.

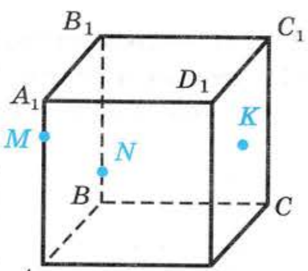
Как и в планиметрии, на этапе анализа предполагаем, что задача уже решена, выполняем соответствующий рисунок и, опираясь на известные свойства прямых и плоскостей, пробуем составить план построения.

На этапе построения по составленному плану описываем построение, детализируя его до элементарных построений в изображенных плоскостях.

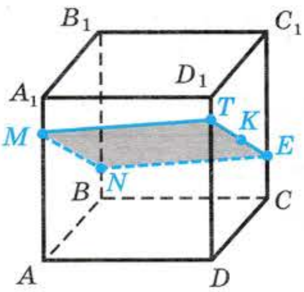
На этапе доказательства обосновываем, что в результате построения действительно получили фигуру с заданными свойствами.

На этапе исследования рассматриваем каждый шаг построения и отвечаем на два вопроса: 1) Всегда ли можно выполнить этот шаг? 2) Сколько фигур получим в результате?

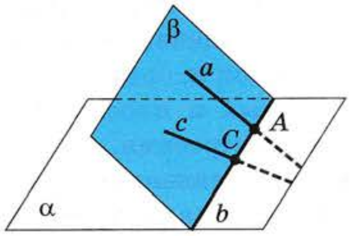
Ориентир. *Если данный многогранник содержит параллельные грани, которые пересекает плоскость сечения, то прямые пересечения секущей плоскости с этими гранями параллельны.*



Задача 2. Постройте сечение прямоугольного параллелепипеда $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, которая проходит через точки K, M, N, где $M \in AA_1$, $N \in BB_1$ и точка K лежит на грани DCC_1D_1.

Решение	**Комментарий**
 1. Точки M и N лежат и в секущей плоскости, и на грани ABB_1A_1, поэтому секущая плоскость пересекает эту грань по отрезку MN. 2. Так как $DCC_1D_1 \parallel ABB_1A_1$, то секущая плоскость пересекает грань DCC_1D_1 по прямой, проходящей через точку K и параллельной прямой MN. Проведем через точку K отрезок $TE \parallel MN$ ($T \in DD_1$, $E \in CC_1$). 3. Соединив отрезками полученные точки сечения секущей плоскости с ребрами призмы, получим четырехугольник $MNET$ — искомое сечение.	Для составления плана построения достаточно вспомнить, что в прямоугольном параллелепипеде противоположные грани попарно параллельны, значит, $ABB_1A_1 \parallel DCC_1D_1$. Секущая плоскость, которая задана тремя точками K, M, N, пересекает плоскость ABB_1A_1 по прямой MN. Поэтому параллельную ей плоскость DCC_1D_1 она будет пересекать по прямой, которая параллельна прямой MN и проходит через точку K. Это и дает план построения. Для того чтобы выполнить план построения, необходимо также учитывать, что прямая MN параллельна плоскости DCC_1D_1 и в этой плоскости через точку K проходит прямая, параллельная данной прямой.

Метод следов построения сечений

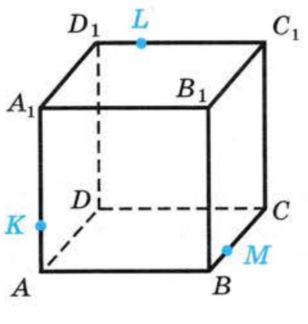


Содержание метода. Сначала строят прямую пересечения секущей плоскости с плоскостью какой-либо грани (*след* секущей плоскости на этой грани), а потом находят точки пересечения секущей плоскости с соответствующими ребрами многогранника (или с их продолжениями). Иногда для этого необходимо рассматривать определенные вспомогательные плоскости, для которых также строят след секущей плоскости (или след этой вспомогательной плоскости на плоскости какой-либо грани).

Для получения следа (то есть прямой b) плоскости β на плоскости α (см. рисунок) **достаточно найти точки пересечения двух прямых плоскости β с плоскостью α (так как две точки, например A и C, однозначно определяют прямую b).**

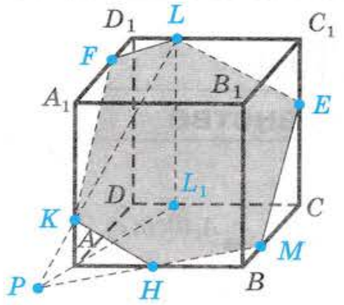
Необходимо помнить, что *точка пересечения какой-либо прямой a плоскости* β *с плоскостью* α *всегда лежит на следе плоскости* β *на плоскости* α (то есть на прямой b).

Если рассматривать параллельное (или центральное) проектирование, то для того, **чтобы найти точку пересечения прямой с плоскостью проекции, достаточно найти точку пересечения прямой с ее проекцией на эту плоскость.**



Задача 3. Постройте сечение куба $ABCDA_1B_1C_1D_1$ плоскостью, проходящей через три точки K, L, M, которые лежат на попарно скрещивающихся ребрах куба (см. рисунок).

Решение



Рассмотрим параллельное проектирование данных точек на плоскость основания $ABCD$ в направлении бокового ребра куба. Тогда проекциями точек K, M, L будут соответственно точки A, M, L_1, где $LL_1 \parallel D_1D$.

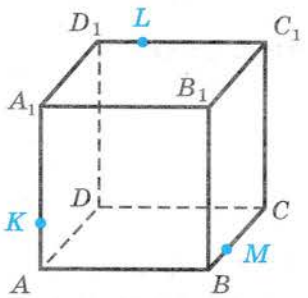
Найдем точку пересечения прямой LK (лежащей в плоскости сечения) с плоскостью основания куба. Пересечение прямой LK с ее проекцией L_1A и будет искомой точкой P. Она принадлежит плоскости сечения и плоскости основания куба. Следовательно, плоскость сечения пересекает основание куба по прямой MP (это и есть след секущей плоскости на плоскости основания куба). Точка H пересечения этой прямой с ребром AB основания куба является еще одной точкой сечения куба. Соединяем точки K и H, H и M отрезками.

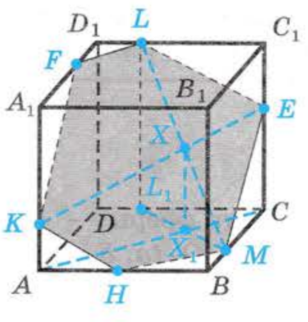
Далее используем параллельность противоположных граней куба, которые секущая плоскость пересекает по параллельным прямым. Через точку L проведем прямую, параллельную KH, и точку ее пересечения с ребром CC_1 куба обозначим E. Соединим точки E и M отрезком. Через точку L проведем также прямую, параллельную HM, и точку ее пересечения с ребром A_1D_1 куба обозначим F. Соединим точки L и F, K и F отрезками. Шестиугольник $KHMELF$ и будет искомым сечением куба данной плоскостью.

Метод внутреннего проектирования построения сечений

Содержание метода. Имея три точки, которые определяют плоскость сечения, находят их проекции на какую-то плоскость (наиболее часто на плоскость основания многогранника). Также находят проекцию какой-либо еще не построенной точки сечения. (Эту неизвестную точку сечения, как правило, выбирают на боковом ребре многогранника таким образом, чтобы какие-то 2 отрезка, соединяющие четыре точки проекции, пересекались во внутренней точке этих отрезков.) С помощью трех данных точек и четырех проекций находят четвертую точку, принадлежащую плоскости сечения. Если необходимо, таким же образом получают пятую, шестую и т. д. точки, которые лежат на плоскости сечения и ребрах многогранника, то есть получают сечение.

Решение задачи 3 методом внутреннего проектирования



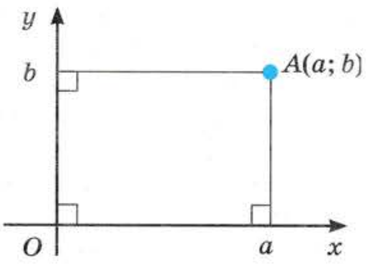


Рассмотрим параллельное проектирование данных точек на плоскость основания $ABCD$ в направлении бокового ребра куба. Тогда проекциями точек K, M, L будут соответственно точки A, M, L_1, где $LL_1 \parallel D_1D$. Будем искать точку E пересечения секущей плоскости с ребром CC_1. Проекцией точки E на плоскость основания является точка C. Соединим четыре полученные точки-проекции двумя отрезками AC и L_1M, которые пересекаются в точке X_1. Точка X_1 — проекция некоторой точки X секущей плоскости, в которой пересекается прямая LM с пока еще не полностью определенной прямой KE. Проведя через точку X_1 прямую, параллельную направлению проектирования ($X_1X \parallel L_1L$), в пересечении ее с прямой LM получаем точку X. Теперь проводим прямую KX до пересечения ее с ребром CC_1 в точке E. Соединяя полученную точку E с данными точками L и M отрезками, находим две стороны искомого сечения.

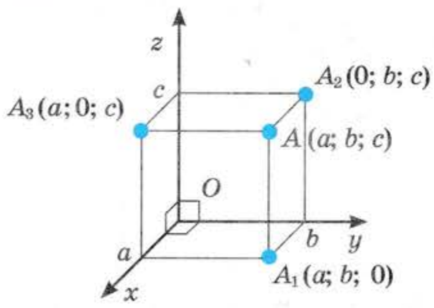
Дальнейшие построения, как и при первом способе решения, опираются на параллельность противоположных граней куба, которые секущая плоскость пересекает по параллельным прямым. Через точку K проведем прямую, параллельную LE, и точку ее пересечения с ребром AB обозначим H. Соединим точки H и M отрезком. Через точку K также проведем прямую, параллельную ME, и точку ее пересечения с ребром A_1D_1 обозначим F. Соединим точки L и F отрезком. Шестиугольник $KHMELF$ и будет искомым сечением куба данной плоскостью.

ДЕКАРТОВЫ КООРДИНАТЫ

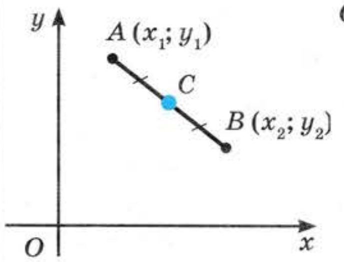
на плоскости



в пространстве



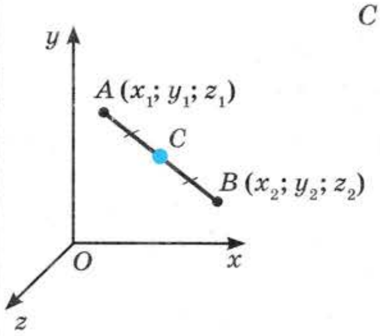
Координаты середины отрезка



C — середина AB

$$x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y_c = \frac{y_1 + y_2}{2}$$



C — середина AB

$$x_c = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$y_c = \frac{y_1 + y_2}{2}$$

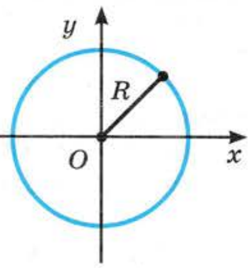
$$z_c = \frac{z_1 + z_2}{2}$$

Расстояние между точками

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

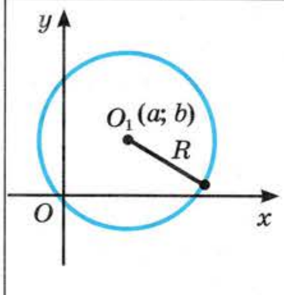
$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

Уравнение окружности



$$x^2 + y^2 = R^2$$

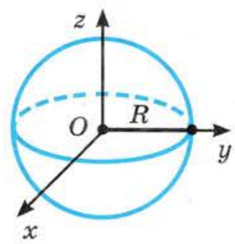
Центр окружности — начало координат



$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$$

Центр окружности — точка O_1 (a, b)

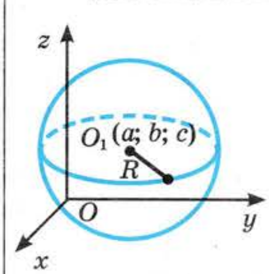
Уравнение сферы



$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$$

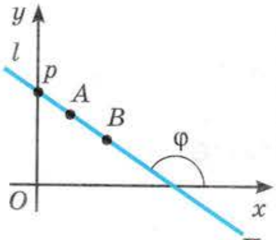
Центр сферы — начало координат

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = R^2$$



Центр сферы — точка O_1 (a, b, c)

Уравнение прямой на плоскости	Уравнение плоскости в пространстве
В общем виде: $\boxed{ax + by + c = 0}$	$\boxed{ax + by + cz + d = 0}$ — плоскость α
С угловым коэффициентом (при $b \neq 0$)	$\boxed{\alpha \perp \vec{n}\ (a,\ b,\ c)}$



$\boxed{y = kx + p}$ — прямая l

$\boxed{k = \operatorname{tg} \varphi}$ — угловой коэффициент

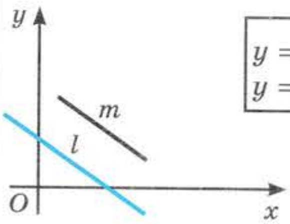
Для прямой AB: $\boxed{k_{AB} = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A}}$

Если плоскость α проходит через точку $M\ (x_0,\ y_0,\ z_0)$ и $\alpha \perp \vec{n}$,

то уравнение плоскости α:

$$\boxed{a\ (x - x_0) + b\ (y - y_0) + c\ (z - z_0) = 0}$$

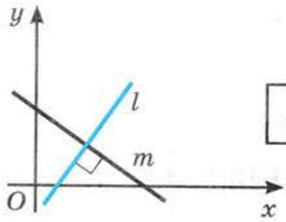
Условия параллельности и перпендикулярности прямых на плоскости



$y = k_1x + b_1$ — прямая l

$y = k_2x + b_2$ — прямая m

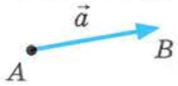
$$\boxed{l \parallel m \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = k_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}}$$



$$\boxed{l \perp m \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1}$$

Таблица 72

ВЕКТОРЫ



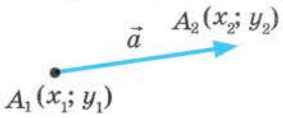
Определение. ***Вектором*** называют направленный отрезок. $\boxed{\overrightarrow{AB} = \vec{a}}$

Длину этого отрезка называют ***длиной (модулем, абсолютной величиной) вектора.***

$$\boxed{|\vec{a}| = AB}$$

Координаты вектора на плоскости	Координаты вектора в пространстве

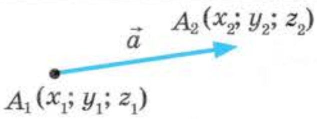
Координаты вектора на плоскости



$\vec{a}\ (a_1;\ a_2)$, где $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$

$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

Координаты вектора в пространстве



$\vec{a}\ (a_1;\ a_2,\ a_3)$, где $a_1 = x_2 - x_1$, $a_2 = y_2 - y_1$, $a_3 = z_2 - z_1$

$$\boxed{|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^3}}$$

Равные векторы

$$\boxed{\vec{a} = \vec{b}} \Leftrightarrow \begin{cases} |\vec{a}| = |\vec{b}| \\ \text{векторы } \vec{a} \text{ и } \vec{b} \text{ одинаково направлены} \end{cases}$$

В координатах

$$\vec{a}\ (a_1; a_2) = \vec{b}\ (b_1; b_2) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \end{cases}$$

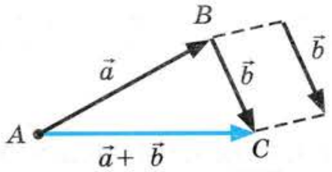
$$\vec{a}\ (a_1; a_2; a_3) = \vec{b}\ (b_1; b_2; b_3) \Leftrightarrow \begin{cases} a_1 = b_1 \\ a_2 = b_2 \\ a_3 = b_3 \end{cases}$$

ОПЕРАЦИИ НАД ВЕКТОРАМИ

Сумма векторов

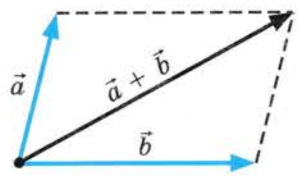
на плоскости	в пространстве
$\vec{a}\,(a_1; a_2)+\vec{b}\,(b_1; b_2)=\vec{c}\,(a_1+b_1; a_2+b_2)$	$\vec{a}\,(a_1; a_2; a_3)+\vec{b}\,(b_1; b_2; b_3)=\vec{c}\,(a_1+b_1; a_2+b_2; a_3+b_3)$

Правило треугольника

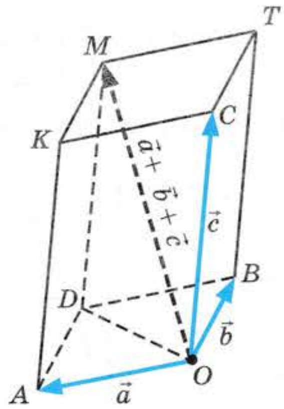


$\boxed{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AC}}$

Правило параллелограмма



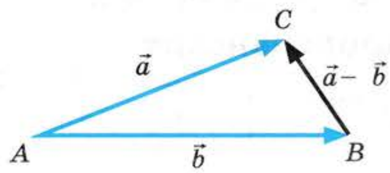
Правило параллелепипеда



$\boxed{\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}$

Разность векторов

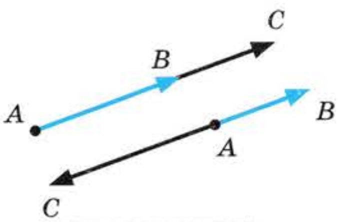
$\vec{a}\,(a_1; a_2)-\vec{b}\,(b_1; b_2)=\vec{c}\,(a_1-b_1; a_2-b_2)$	$\vec{a}\,(a_1; a_2; a_3)-\vec{b}\,(b_1; b_2; b_3)=\vec{c}\,(a_1-b_1; a_2-b_2; a_3-b_3)$



$\boxed{\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{BC}}$

Умножение вектора на число

$\boxed{\lambda\cdot\overrightarrow{(a_1; a_2)}=\overrightarrow{(\lambda a_1; \lambda a_2)}}$	$\boxed{\lambda\cdot\overrightarrow{(a_1; a_2; a_3)}=\overrightarrow{(\lambda a_1; \lambda a_2; \lambda a_3)}}$

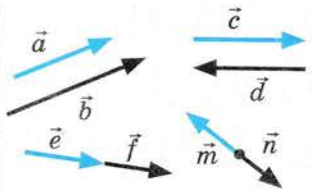


$\boxed{\overrightarrow{AC}=\lambda\overrightarrow{AB}}$

При $\lambda>0$ вектор $\lambda\vec{a}$ и вектор $\vec{a}$ направлены одинаково.
При $\lambda<0$ вектор $\lambda\vec{a}$ и вектор $\vec{a}$ направлены противоположно.

$\boxed{|\lambda\vec{a}|=|\lambda|\cdot|\vec{a}|}$

Коллинеарные векторы

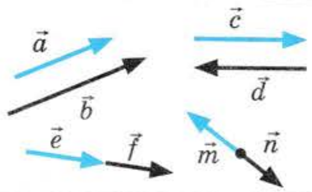


Определение. Ненулевые векторы называют ***коллинеарными***, если они лежат на одной прямой или на параллельных прямых.

Коллинеарные векторы направлены либо одинаково, либо противоположно.

$\boxed{\vec{a} \text{ и } \vec{b} \text{ коллинеарны} \Leftrightarrow \vec{b} = \lambda\vec{a} \Leftrightarrow \frac{b_1}{a_1} = \frac{b_2}{a_2} = \frac{b_3}{a_3}}$ (соответствующие координаты пропорциональны, то есть $b_1 = \lambda a_1$; $b_2 = \lambda a_2$; $b_3 = \lambda a_3$)

Скалярное произведение векторов



$$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos\varphi}$$

Скалярное произведение векторов равно произведению их длины на косинус угла между ними.

В координатах

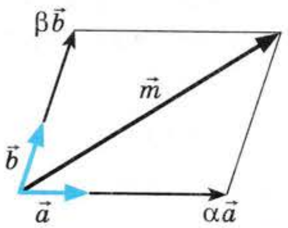
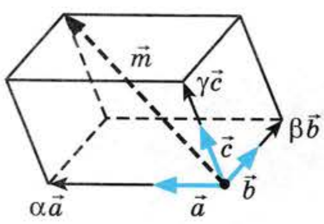
на плоскости	в пространстве
$\vec{a}\,(a_1; a_2)$; $\vec{b}\,(b_1; b_2)$	$\vec{a}\,(a_1; a_2; a_3)$; $\vec{b}\,(b_1; b_2; b_3)$
$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2}$	$\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2 + a_3 \cdot b_3}$

Скалярное произведение векторов равно сумме произведения одноименных координат.

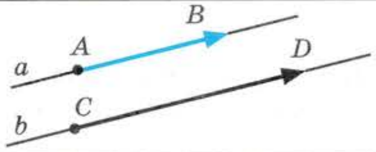
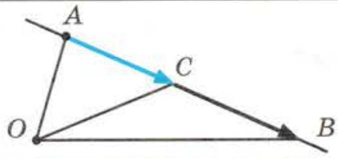
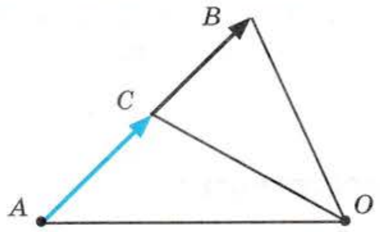
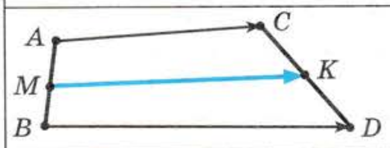
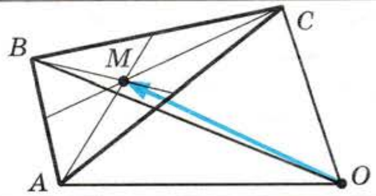
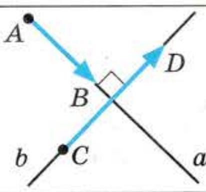
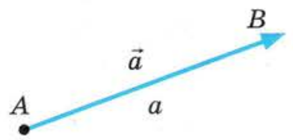
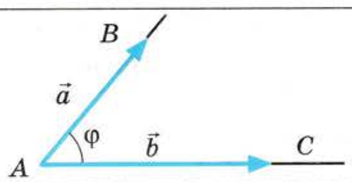
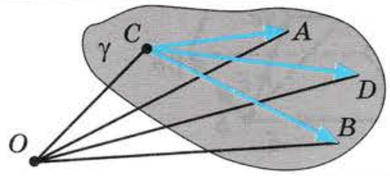
При $\vec{a} \neq 0$ и $\vec{b} \neq 0$ $\boxed{\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \Leftrightarrow \vec{a} \perp \vec{b}}$

Таблица 74

РАЗЛОЖЕНИЕ ВЕКТОРА

на плоскости	в пространстве
$\vec{m}$ — произвольный вектор плоскости, $\vec{a}$ и $\vec{b}$ — неколлинеарные векторы.	$\vec{m}$ — произвольный вектор пространства, $\vec{a}$, $\vec{b}$ и $\vec{c}$ — некомпланарные (то есть не параллельные одной плоскости) векторы.
Всегда существует разложение:	Всегда существует разложение:
$\boxed{\vec{m} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b}}$ (α и β — единственные)	$\boxed{\vec{m} = \alpha\vec{a} + \beta\vec{b} + \gamma\vec{c}}$ (α, β и γ — единственные)
	

ПЕРЕВОД ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ ФАКТОВ НА ВЕКТОРНЫЙ ЯЗЫК И ВЕКТОРНЫХ СООТНОШЕНИЙ НА ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ЯЗЫК

	Прямые параллельны $a \parallel b$ (прямые a и b не совпадают)	Векторы коллинеарны $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{CD}$
	$C \in AB$ $\left(\frac{AB}{AC} = \lambda\right)$	Векторы коллинеарны $\overrightarrow{AB} = \lambda\overrightarrow{AC}$ или $\overrightarrow{OC} = p\overrightarrow{OA} + (1-p)\cdot\overrightarrow{OB}$
	$\frac{AC}{CB} = \frac{m}{n}$	а) $\overrightarrow{AC} = \frac{m}{n}\overrightarrow{CB}$; б) $\overrightarrow{OC} = \frac{n}{m+n}\overrightarrow{OA} + \frac{m}{m+n}\overrightarrow{OB}$.
	C — середина AB $\left(\frac{AC}{CB} = 1\right)$	$\overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}\right)$
	M — середина AB; K — середина CD	$\overrightarrow{MK} = \frac{1}{2}\left(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD}\right)$
	M — точка пересечения медиан $\triangle ABC$; O — произвольная точка	$\overrightarrow{OM} = \frac{1}{3}\left(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC}\right)$
	$a \perp b$	$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{CD} = 0$ $\left(\overrightarrow{AB} \neq \vec{0}, \overrightarrow{CD} \neq \vec{0}\right)$
	$AB = a$	$\vec{a}^2 = \lvert\vec{a}\rvert^2$, где $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$, $\lvert\vec{a}\rvert = a$ (в координатах: $\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{x_{\vec{a}}^2 + y_{\vec{a}}^2}$ — на плоскости; $\lvert\vec{a}\rvert = \sqrt{x_{\vec{a}}^2 + y_{\vec{a}}^2 + z_{\vec{a}}^2}$ — в пространстве)
	$\angle BAC = \varphi$	$\cos\varphi = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\lvert\vec{a}\rvert\cdot\lvert\vec{b}\rvert}$, где $\overrightarrow{AB} = \vec{a}$, $\overrightarrow{AC} = \vec{b}$, φ — угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$
	$D \in$ пл. ABC $C \notin AB$ O — произвольная точка	а) $\overrightarrow{CD} = \alpha\overrightarrow{CA} + \beta\overrightarrow{CB}$; б) $\overrightarrow{OD} = \alpha\overrightarrow{OA} + \beta\overrightarrow{OB} + (1-\alpha-\beta)\overrightarrow{OC}$

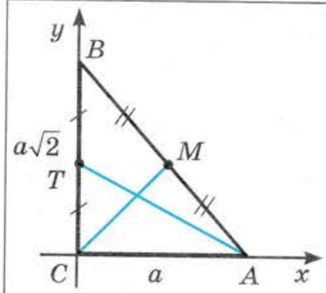
ИСПОЛЬЗОВАНИЕ КООРДИНАТ И ВЕКТОРОВ ПРИ РЕШЕНИИ ЗАДАЧ

Схема решения геометрических задач векторным методом

1. **Перевести требование задачи на векторный язык** (табл. 75).
2. **Ввести прямоугольную систему координат** или *выбрать два неколлинеарных вектора на плоскости (или три некомпланарных вектора в пространстве) как базисные.*
3. **Найти координаты векторов, выделенных в пункте 1,** или *выразить эти векторы через базисные.*
4. **Доказать или найти выделенное в пункте 1 соотношение и перевести результат на геометрический язык** (для перевода опять воспользоваться соотношениями табл. 75).

Задача 1. В прямоугольном треугольнике ABC ($\angle C = 90°$) $AC = a$, $BC = a\sqrt{2}$. **Докажите, что медианы, проведенные из вершин A и C, взаимно перпендикулярны.**

Решение



1. Если AT и CM — медианы данного прямоугольного треугольника, то *для доказательства их перпендикулярности достаточно доказать, что скалярное произведение соответствующих векторов равно нулю,* то есть доказать, что $\overrightarrow{AT} \cdot \overrightarrow{CM} = 0$.
2. *Введем систему координат* так, как изображено на рисунке. Тогда точки A, C, B, T, M (T — середина CB, M — середина AB) имеют координаты: $A\ (a;\ 0)$, $C\ (0;\ 0)$, $B\ (0;\ a\sqrt{2})$, $T\left(0; \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$, $M\left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{2}\right)$.
3. *Запишем координаты векторов, выделенных в пункте* 1 (см. табл. 72):

$$\overrightarrow{AT} = \left(-a; \frac{a\sqrt{2}}{2}\right),\ \overrightarrow{CM} = \left(\frac{a}{2}; \frac{a\sqrt{2}}{2}\right).$$

4. *Найдем скалярное произведение этих векторов*:

$$\overrightarrow{AT} \cdot \overrightarrow{CM} = -a \cdot \frac{a}{2} + \frac{a\sqrt{2}}{2} \cdot \frac{a\sqrt{2}}{2} = -\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} = 0.$$

Это равенство и означает, что векторы $\overrightarrow{AT}$ и $\overrightarrow{CM}$ перпендикулярны (табл. 75), то есть медианы AT и CM взаимно перпендикулярны.

СОДЕРЖАНИЕ