Е. П. Нелин

АЛГЕБРА В ТАБЛИЦАХ

Учебное пособие для учащихся 7–11 классов

«Схвалено для використання у загальноосвітніх навчальних закладах» Министерством образования и науки, молодежи и спорта Украины

3-е издание

Харьков
«Гимназия»
2011

УДК 373:51
ББК 22.14я721
Н49

«Схвалено для використання у загальноосвітніх навчальних закладах»
научно-методической комиссией по математике Научно-методического Совета по вопросам образования Министерства образования и науки, молодежи и спорта Украины
(Письмо от 28.12.2009 г. № 1.4/18-Г-553)

Рецензенты:

Е. Е. Харик — учитель-методист, зав. кафедрой математики физико-математического лицея № 27 г. Харькова

И. П. Проскурня — канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры математики Харьковского национального педагогического университета им. Г. С. Сковороды

Навчальний посібник може бути використаний як учнями для повторення шкільного курсу алгебри, початків аналізу й комбінаторики, так і вчителями на уроці під час узагальнення тієї чи іншої теми незалежно від того, за якими підручниками алгебри і початків аналізу для середньої школи вони працюють. У посібнику логічно впорядковано й систематизовано той мінімум основних і додаткових даних зі шкільного курсу алгебри, початків аналізу й комбінаторики, який дає змогу розв'язувати різноманітні задачі, які пропонують у завданнях державної підсумкової атестації або зовнішнього незалежного оцінювання з математики.

Для учнів 7–11 класів загальноосвітніх навчальних закладів.

Нелин Е. П.

Н49 Алгебра в таблицах : учеб. пособие для учащихся 7–11 кл./ Е. П. Нелин. — 3-е изд. — Х. : Гимназия, 2011.— 128 с. : ил.
ISBN 978-966-474-175-7.

Учебное пособие может быть использовано как учащимися для повторения школьного курса алгебры, начал анализа и комбинаторики, так и учителями на уроке при обобщении той или иной темы независимо от того, по каким учебникам алгебры и начал анализа для средней школы они работают. В пособии логически упорядочен и систематизирован тот минимум основных и дополнительных данных из школьного курса алгебры, начал анализа и комбинаторики, который позволяет решать всевозможные задачи, предлагаемые в заданиях государственной итоговой аттестации или внешнего независимого оценивания по математике.

Для учащихся 7–11 классов общеобразовательных учебных заведений.

УДК 373:51
ББК 74.262+22.14

ISBN 978-966-474-175-7

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие

В пособии логически упорядочен и систематизирован минимум основных и дополнительных сведений из школьных курсов алгебры и начал математического анализа, который позволяет решать самые сложные алгебраические задачи, предлагаемые на выпускных или вступительных экзаменах и в заданиях государственной итоговой аттестации и внешнего независимого оценивания по математике.

Однако ценность этого пособия не только в том, что оно может быть хорошим помощником учащимся при подготовке к экзаменам. Не менее важным является его использование учеником и учителем в повседневной работе в классе и при подготовке к уроку. Как известно, в соответствии с требованиями современных программ материал в учебниках математики структурирован в виде некой последовательности фрагментов разных содержательных линий (линия развития понятия числа — числовые множества, функциональная линия, линия уравнений и неравенств и т. д.), что, безусловно, помогает учащимся осознать связи между ними. Однако обратной стороной такой фрагментарности подачи учебного материала являются трудности, возникающие у учащихся при понимании как того, какова внутренняя логика развития каждой из указанных выше содержательных линий, так и того, что в целом представляет собой учебный предмет «Алгебра», на освоение которого тратится столько времени и усилий. Эти трудности в значительной мере могут быть устранены при использовании пособия в качестве дополнительного материала в повседневной учебной работе.

Простейшие преобразования графиков функций (по любому учебнику алгебры) удобно рассматривать, например, с использованием табл. 32, в которой систематизированы и обобщены основные элементарные преобразования функции $y = f(x)$. После рассмотрения примеров, приведенных в таблице, делаются общие выводы, которые также коротко зафиксированы в таблице, а потом рассматриваются более полные формулировки соответствующих свойств, приведенных в учебнике. Желательно также уяснить, что полученные свойства позволяют построить графики функций $y = |f(x)|$ и $y = f(|x|)$ (строки 3 и 4 табл. 32).

Аналогично в курсе «Алгебра и начала математического анализа» свойства и графики показательных и логарифмических функций удобно рассматривать по табл. 38.

Настоящее пособие существенно отличается от других тем, что здесь предлагается систематизировать и обобщить свои знания и умения (например, в решении уравнений и неравенств) с помощью выделения общих схем рассуждений, касающихся решения любых уравнений и неравенств (см., к примеру, табл. 40–43). При этом рассматриваемые схемы связаны в первую очередь с поиском плана решения, а уже потом — с самим решением.

Для удобства работы таблицы сгруппированы по традиционным разделам школьных курсов алгебры и алгебры и начал анализа. Названия этих 9 разделов даны в содержании, помещенном в начале пособия. В конце приведен предметный указатель, позволяющий оперативно определить номера страниц, на которых рассматриваются соответствующие понятия, правила или формулы.

Учебное пособие может быть использовано как учащимися для повторения школьных курсов алгебры и начал математического анализа, так и учителями на уроке при обобщении материала той или иной темы в процессе работы с любым учебником алгебры или алгебры и начал математического анализа для средней школы, например, при подготовке к государственной итоговой аттестации и внешнему независимому оцениванию по математике.

Таблица 1

МНОЖЕСТВА И НЕКОТОРЫЕ ОПЕРАЦИИ НАД МНОЖЕСТВАМИ

Обозначение

Элемент a принадлежит множеству A	$\Leftrightarrow$	$a \in A$
Элемент b не принадлежит множеству A	$\Leftrightarrow$	$b \notin A$
В множестве нет элементов	$\Leftrightarrow$	$\varnothing$

Понятие множества. Множество можно представить как совокупность некоторых объектов, объединенных по какому-либо признаку. В математике множество — одно из основных неопределяемых понятий.

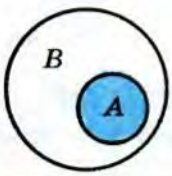
Каждый объект, входящий в множество A, называют **элементом этого множества.**

Множество, которое не содержит ни одного элемента, называют **пустым множеством** и обозначают $\varnothing$.

Два множества называют **равными**, если каждый элемент первого множества является элементом второго множества и, наоборот, каждый элемент второго множества является элементом первого множества

Подмножество ($\subset$)

$A \subset B$



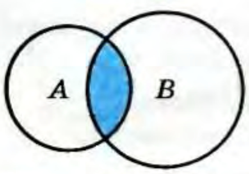
$A \subset B \Leftrightarrow$ Если $x \in A$, то $x \in B$

Если каждый элемент одного множества A является элементом другого множества B, то говорят, что первое множество A является **подмножеством** второго множества B, и записывают так: $A \subset B$.

Используют также запись $A \subseteq B$

Пересечение множеств ($\cap$)

$A \cap B$

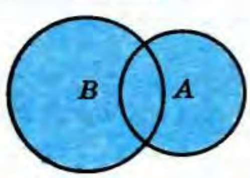


$A \cap B \Leftrightarrow x \in A$ и $x \in B$

Пересечением множества A и B называют их общую часть, т. е. множество всех элементов, принадлежащих как множеству A, так и множеству B

Объединение множеств ($\cup$)

$A \cup B$



$A \cup B \Leftrightarrow x \in A$ или $x \in B$

Объединением множеств A и B называют множество, составленное из всех элементов, которые принадлежат хотя бы одному из этих множеств (A или B)

ЧИСЛОВЫЕ МНОЖЕСТВА

Комплексные числа K (или C)

Числа вида $a + bi$,
где $a, b \in R$, i — мнимая единица, $i^2 = -1$

Действительные числа R

Числа, которые можно представить в виде бесконечной десятичной дроби

Мнимые числа

$a + bi$,
где $b \neq 0$

Рациональные числа Q

Можно представить в виде несократимой дроби $\frac{m}{n}$, где m — целое, n — натуральное число	Представляют в виде бесконечной **периодической** десятичной дроби $\left(\frac{1}{3} = 0{,}333... = 0{,}(3)\right)$

Иррациональные числа

Нельзя представить в виде дроби $\frac{m}{n}$, где m — целое, n — натуральное число	Представляют в виде бесконечной **непериодической** десятичной дроби $(\sqrt{2} = 1{,}4142135...)$

Целые числа Z

Включают натуральные числа, числа, им противоположные, и число 0

Дробные числа

Числа, составленные из целого числа частей единицы

Примеры. $\frac{2}{5}$ — обыкновенная дробь;

$3{,}27$ — десятичная дробь $\left(3{,}27 = \frac{327}{100}\right)$;

$\frac{6}{3}$ — дробное число, значение которого равно целому числу $\left(\frac{6}{3} = 2\right)$

Натуральные числа N (целые положительные)

Для школьного курса математики натуральное число — основное неопределяемое понятие

Число 0

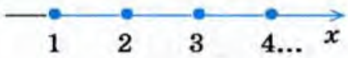
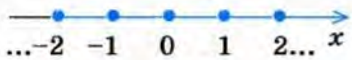
Такое число, что любое число при сложении с ним не меняется:
$a + 0 = 0 + a = a$

Целые отрицательные числа

Числа, противоположные натуральным

$$N \subset Z \subset Q \subset R \subset K$$

ОБОЗНАЧЕНИЕ НЕКОТОРЫХ ЧИСЛОВЫХ МНОЖЕСТВ

Обозначение	**Изображение**	**Запись с помощью неравенств**	**Словесная формулировка**
N			Множество всех натуральных чисел
Z			Множество всех целых чисел
Q			Множество всех рациональных чисел
R		$-\infty < x < +\infty$	Множество всех действительных чисел
$(-\infty; +\infty)$			Числовая прямая
$[a; b]$		$a \leqslant x \leqslant b$	Закрытый промежуток (отрезок) с концами a и b ($a < b$)
$(a; b)$		$a < x < b$	Открытый промежуток (интервал) с концами a и b
$[a; b)$		$a \leqslant x < b$	Полуоткрытый промежуток (полуинтервал) с концами a и b
$(a; b]$		$a < x \leqslant b$	
$(-\infty; a)$		$x < a$	Бесконечный промежуток (луч)
$(-\infty; a]$		$x \leqslant a$	
$(a; +\infty]$		$x > a$	
$[a; +\infty)$		$x \geqslant a$	

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ЧИСЛОВЫХ РАВЕНСТВ И НЕРАВЕНСТВ

Свойства числовых равенств	Свойства числовых неравенств
1. Если $a = b$, то $b = a$	1. Если $a > b$, то $b < a$
2. Если $a = b$ и $b = c$, то $a = c$ (*транзитивность равенства*)	2. Если $a > b$ и $b > c$, то $a > c$ (*транзитивность неравенства*)
3. Если $a = b$, то $a + c = b + c$	3. Если $a > b$, то $a + c > b + c$
4. Если $a = b$ и $c = d$, то $a + c = b + d$	4. Если $a > b$ и $c > d$, то $a + c > b + d$
5. Если $a = b$ и $c \neq 0$, то $ac = bc$	5. а) Если $a > b$ и $c > 0$, то $ac > bc$ б) Если $a > b$ и $c < 0$, то $ac < bc$
6. Если $a = b$ и $c = d$, то $ac = bd$	6. Если $a > b$ ($a > 0$, $b > 0$) и $c > d$ ($c > 0$, $d > 0$), то $ac > bd$
7. Если $a = b$, то $a^n = b^n$	7. а) Если $a > b$ ($a > 0$, $b \geqslant 0$), то $a^{2k} > b^{2k}$ б) Если $a > b$, то $a^{2k+1} > b^{2k+1}$
8. а) Если $a = b$ ($a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$), то $\sqrt[2k]{a} = \sqrt[2k]{b}$ б) Если $a = b$, то $\sqrt[2k+1]{a} = \sqrt[2k+1]{b}$	8. а) Если $a > b$ ($a > 0$, $b > 0$), то $\sqrt[2k]{a} > \sqrt[2k]{b}$ б) Если $a > b$, то $\sqrt[2k+1]{a} > \sqrt[2k+1]{b}$
9. Если $a = b$, $a \neq 0$, $b \neq 0$, то $\frac{1}{a} = \frac{1}{b}$	9. Если $a > b$ ($a > 0$, $b > 0$), то $\frac{1}{a} < \frac{1}{b}$
10. $ab = 0$ тогда и только тогда, когда $a = 0$ или $b = 0$	10. а) $ab > 0$ тогда и только тогда, когда $a > 0$ и $b > 0$ или $a < 0$ и $b < 0$ б) $ab < 0$ тогда и только тогда, когда $a > 0$ и $b < 0$ или $a < 0$ и $b > 0$
11. $\frac{a}{b} = 0$ тогда и только тогда, когда $a = 0$ и $b \neq 0$	11. а) $\frac{a}{b} > 0$ тогда и только тогда, когда $a > 0$ и $b > 0$ или $a < 0$ и $b < 0$ б) $\frac{a}{b} < 0$ тогда и только тогда, когда $a > 0$ и $b < 0$ или $a < 0$ и $b > 0$

НЕКОТОРЫЕ СПЕЦИАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Определения средних величин

Среднее арифметическое	Среднее геометрическое
$A_n = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — любые числа	$G_n = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ $a_1 \geqslant 0;\ a_2 \geqslant 0;\ \ldots;\ a_n \geqslant 0$
Среднее гармоническое	**Среднее квадратичное**
$H_n = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$ $a_1 \neq 0;\ a_2 \neq 0;\ \ldots;\ a_n \neq 0,\ \frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n} \neq 0$	$S = \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2}{n}}$ $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — любые числа

Общее соотношение между средними величинами

$$\boxed{S \geqslant A_n \geqslant G_n \geqslant H_n}$$

$(a_1 > 0;\ a_2 > 0;\ \ldots;\ a_n > 0)$

причем равенство достигается только при

$a_1 = a_2 = \ldots = a_n$

Неравенство Коши

$$\boxed{\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}}$$

где $a \geqslant 0;\ b \geqslant 0$

$$\boxed{\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}}$$

где $a \geqslant 0;\ b \geqslant 0;\ c \geqslant 0$

...

$$\boxed{\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}}$$

где $a_1 \geqslant 0;\ a_2 \geqslant 0;\ \ldots;\ a_n \geqslant 0$

Среднее арифметическое нескольких неотрицательных чисел не меньше их среднего геометрического. (Равенство достигается только тогда, когда все числа равны между собой.)

Следствия

1. *Если сумма положительных чисел постоянна, то их произведение наибольшее, когда числа равны между собой.*
2. *Если произведение положительных чисел постоянно, то их сумма наименьшая, когда числа равны между собой*

Оценка суммы двух взаимно обратных чисел

Если $a > 0$, то	Если $b < 0$, то
$\boxed{a + \frac{1}{a} \geqslant 2}$	$\boxed{b + \frac{1}{b} \leqslant -2}$
Сумма двух взаимно обратных положительных чисел больше или равна 2 (причем равенство достигается только при $a = 1$)	*Сумма двух взаимно обратных отрицательных чисел меньше или равна -2 (причем равенство достигается только при $b = -1$)*

Оценка суммы квадратов трех чисел

$\boxed{a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + ac + bc}$ для любых a, b, c

Неравенство Бернулли

Для любого действительного числа $a > 0$ и любого рационального $r > 1$

$$\boxed{(1 + a)^r > 1 + ra}$$

Неравенство Коши–Буняковского

Для любых действительных чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ и $b_1, b_2, \ldots, b_n$

$$\boxed{(a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_n^2)\cdot(b_1^2 + b_2^2 + \ldots + b_n^2)}$$

Равенство достигается тогда и только тогда, когда числа a и b пропорциональны. (Если эти числа не равны нулю, то $\frac{a_1}{b_1} = \frac{a_2}{b_2} = \ldots = \frac{a_n}{b_n}$. Если какие-либо из этих чисел равны нулю, то пропорциональность означает, что существует такое число $\lambda \neq 0$, что $a_1 = \lambda b_1$, $a_2 = \lambda b_2$, …, $a_n = \lambda b_n$.)

Методы доказательства неравенств

1. *Составление разности левой и правой частей неравенства (если разность положительна, то левая часть больше правой)*	**Пример.** Доказать неравенство $a^3 + b^3 \geqslant ab\,(a + b)$, если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$. *Решение.* $a^3 + b^3 - ab\,(a + b) = a^3 - a^2b - ab^2 + b^3 = a^2\,(a - b) - b^2\,(a - b) = (a - b)\,(a^2 - b^2) = (a - b)^2\,(a + b) \geqslant 0$ (так как при $a \geqslant 0$ и $b \geqslant 0$ $a + b \geqslant 0$ и $(a - b)^2 \geqslant 0$). Следовательно, $a^3 + b^3 \geqslant ab\,(a + b)$
2. *Использование известных специальных неравенств* (табл. 5) *и свойств числовых неравенств* (табл. 4), *в частности усиление неравенства с использованием транзитивности*	**Пример.** Доказать неравенство $(a + b)\,(b + c)\,(a + c) \geqslant 8abc$, если $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$. *Решение.* Запишем неравенство Коши (см. выше) для неотрицательных чисел a и b, b и c, a и c: $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, $\frac{b+c}{2} \geqslant \sqrt{bc}$, $\frac{a+c}{2} \geqslant \sqrt{ac}$. Перемножив почленно эти неравенства (с неотрицательными членами!), получаем $\frac{(a+b)\,(b+c)\,(a+c)}{8} \geqslant \sqrt{a^2b^2c^2}$. Умножая обе части этого неравенства на положительное число 8 и учитывая, что $a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$, $c \geqslant 0$, получаем $(a + b)\,(b + c)\,(a + c) \geqslant 8abc$
3. *Использование возрастания или убывания соответствующих функций и использование производной* (определение и свойства производной см. в табл. 75–80)	**Пример.** Доказать неравенство $\ln x \leqslant x - 1$ при $x \geqslant 1$. *Решение.* Рассмотрим функцию $f(x) = \ln x - x + 1$. $f'(x) = \frac{1}{x} - 1 = \frac{1-x}{x} < 0$ при $x > 1$. Следовательно, $f(x)$ убывает на $(1; +\infty)$ (а так как $f(x)$ непрерывна в точке 1, то она убывает и на $[1; +\infty)$). Поскольку $f(1) = 0$, значит, при $x > 1$ $f(x) < f(1) = 0$. При $x = 1$ данное неравенство превращается в равенство. Итак, $\ln x - x + 1 \leqslant 0$, т. е. $\ln x \leqslant x - 1$ при $x \geqslant 1$

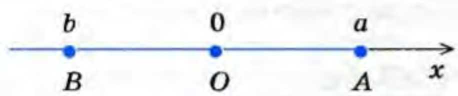
Таблица 6

МОДУЛЬ ЧИСЛА И ЕГО СВОЙСТВА

Определение	**Примеры**
Модулем положительного числа называют само это число; модулем отрицательного числа называют число, ему противоположное; модуль нуля равен нулю	$\vert -3 \vert = 3$; $\vert 5 \vert = 5$; $\vert 0 \vert = 0$; $\vert a^4 \vert = a^4$ (поскольку $a^4 \geqslant 0$)

$$|a| = \begin{cases} a \text{ при } a > 0 \\ 0 \text{ при } a = 0 \\ -a \text{ при } a < 0 \end{cases} = \begin{cases} a \text{ при } a \geqslant 0 \\ -a \text{ при } a < 0 \end{cases} = \begin{cases} a \text{ при } a > 0 \\ -a \text{ при } a \leqslant 0 \end{cases} = \begin{cases} a \text{ при } a \geqslant 0 \\ -a \text{ при } a \leqslant 0 \end{cases}$$

Геометрический смысл модуля



$\boxed{|a| = OA;\ |b| = OB}$

$\boxed{|a - b| = AB}$

На координатной прямой модуль — это расстояние от начала координат до точки, изображающей данное число.

Модуль разности двух чисел a и b — это расстояние между точками a и b на координатной прямой

Свойства модуля

1.	$\boxed{\vert a \vert \geqslant 0}$	Модуль любого числа — неотрицательное число
2.	$\boxed{\vert -a \vert = \vert a \vert}$	Модули противоположных чисел равны
3.	$\boxed{a \leqslant \vert a \vert}$	Величина числа не превышает величину его модуля
4.	$\boxed{\vert a \cdot b \vert = \vert a \vert \cdot \vert b \vert}$	*Модуль произведения равен произведению модулей сомножителей*
5.	$\boxed{\left\vert \frac{a}{b} \right\vert = \frac{\vert a \vert}{\vert b \vert}\ (b \neq 0)}$	*Модуль дроби равен модулю числителя, деленному на модуль знаменателя (если знаменатель не равен нулю)*

6. $\boxed{\vert a^n \vert = \vert a \vert^n}$	7. $\boxed{\vert a \vert^2 = a^2}$	8. $\boxed{\vert a \vert^{2k} = a^{2k}}$

9.	$\boxed{\vert a + b \vert \leqslant \vert a \vert + \vert b \vert}$ $\boxed{\vert a_1 + a_2 + \dots + a_n \vert \leqslant \vert a_1 \vert + \vert a_2 \vert + \dots + \vert a_n \vert}$	Модуль суммы не превышает сумму модулей слагаемых
10.	$\boxed{\vert \vert a \vert - \vert b \vert \vert \leqslant \vert a \pm b \vert \leqslant \vert a \vert + \vert b \vert}$	

ДЕЛИМОСТЬ ЦЕЛЫХ ЧИСЕЛ

Определение. Целое число a делится на целое число b ($b \neq 0$), если существует такое целое c, что $a = bc$. В этом случае b называют **делителем** числа a, в число a — **кратным** числа b	**Обозначение** $\boxed{a \text{ делится на } b} \Leftrightarrow \boxed{a \,\vdots\, b}$ $\boxed{\begin{matrix} a \,\vdots\, b \\ a, b \in \boldsymbol{Z}, b \neq 0 \end{matrix}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} \text{существует } c \in \boldsymbol{Z} \\ a = bc \end{matrix}}$

Свойства

1. Если $a \,\vdots\, b$ и $a > 0$, то $a \geqslant b$	**4.** Если $a \,\vdots\, b$ и $b \,\vdots\, c$, то $a \,\vdots\, c$ *(транзитивность деления)*
2. Если $a \,\vdots\, b$ и $b \,\vdots\, a$ ($a > 0$, $b > 0$), то $a = b$	**5.** Если $a \,\vdots\, b$ и $k \neq 0$, то $ak \,\vdots\, bk$
3. Если $a \,\vdots\, c$ и $b \,\vdots\, c$, m и n — любые целые числа, то $(ma + nb) \,\vdots\, c$. **Частный случай** ($m = 1$, $n = \pm 1$) Если $a \,\vdots\, c$ и $b \,\vdots\, c$, то $(a \pm b) \,\vdots\, c$. Если каждое слагаемое делится на c, то их алгебраическая сумма также делится на c	**6.** Если $a \,\vdots\, b$ и $a \,\vdots\, c$, причем b и c — **взаимно простые** числа (т. е. их НОД равен единице), то $a \,\vdots\, bc$. **Пример.** 48 делится на 3 и на 8 (3 и 8 — взаимно простые числа). Тогда 48 делится на $3 \cdot 8 = 24$

ПРОСТЫЕ И СОСТАВНЫЕ ЧИСЛА. ПРОСТЫЕ ДЕЛИТЕЛИ

Определение	**Определение**
Натуральное число p называется **простым**, если у него только два натуральных делителя — 1 и само число. 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 37, 41, 43, ... — простые числа. *Простых чисел бесконечно много*	Натуральное число называется **составным**, если оно имеет более двух натуральных делителей. 6, 15, 130, 998, ... — составные числа

1 не является ни простым числом, ни составным

Свойства простых делителей натуральных чисел

1. Всякое натуральное число (большее единицы) или делится на данное простое число p, или является взаимно простым с ним

2. ***Если произведение нескольких сомножителей делится на простое число p, то по крайней мере один из сомножителей делится на p***

3. *Наименьший простой делитель составного числа a не превышает $\sqrt{a}$.*

Пример. Наименьший простой делитель числа 143 равен 11 ($143 = 11 \cdot 13$), причем $11 < \sqrt{143} = 11{,}96$

Следствие

Если данное число q не делится ни на одно из простых чисел 2, 3, 5, ..., p, где $p \leqslant \sqrt{q}$, то это число q — простое

Пример. Пусть $q = 113$, тогда $\sqrt{113} \approx 10$. Все простые числа $p \leqslant \sqrt{113}$ — это 2, 3, 5, 7. Так как 113 не делится ни на одно из этих простых чисел, то оно само простое

Основная теорема теории делимости

Всякое натуральное число, большее единицы, можно разложить на произведение простых чисел, причем это разложение единственное с точностью до порядка сомножителей.

$$a = p_1 \cdot p_2 \cdot p_3 \cdot \ldots \cdot p_m,$$
где $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_m$ — простые числа

Запись $\boxed{a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}}$ — **каноничное разложение числа a**

($p_1, p_2, \ldots, p_k$ — простые числа;
$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ — натуральные).

Примеры. $105 = 3 \cdot 5 \cdot 7$;
$792 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 11 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 11^1$

Запись произвольного делителя числа a через простые делители

Если $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$ — каноничное разложение числа a, то ***натуральными делителями числа a будут только числа***
$$d = p_1^{\beta_1} \cdot p_2^{\beta_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\beta_k},$$
где $0 \leqslant \beta_1 \leqslant \alpha_1$, $0 \leqslant \beta_2 \leqslant \alpha_2$, ..., $0 \leqslant \beta_k \leqslant \alpha_k$.

Количество всех делителей числа a равно

$$\boxed{(\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1) \ldots (\alpha_k + 1)}$$

Пример. $180 = 2^2 \cdot 3^2 \cdot 5^1$. Любой делитель числа 180
$$d = 2^{\beta_1} \cdot 3^{\beta_2} \cdot 5^{\beta_3},$$
где $0 \leqslant \beta_1 \leqslant 2$, $0 \leqslant \beta_2 \leqslant 2$, $0 \leqslant \beta_3 \leqslant 1$.

Количество всех делителей: $(2 + 1)(2 + 1)(1 + 1) = 18$

β_1	0	0	0	0	0	0	1	1	1	1	1	1	2	2	2	2	2	2
β_2	0	0	1	1	2	2	0	0	1	1	2	2	0	0	1	1	2	2
β_3	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1	0	1
d	1	5	3	15	9	45	2	10	6	30	18	90	4	20	12	60	36	180

Таблица простых чисел (до 997)

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47	53	59	61	67	71	73
79	83	89	97	101	103	107	109	113	127	131	137	139	149	151	157	163	167	173	179	181
191	193	197	199	211	223	227	229	233	239	241	251	257	263	269	271	277	281	283	293	307
311	313	317	331	337	347	349	353	359	367	373	379	383	389	397	401	409	419	421	431	433
439	443	449	457	461	463	467	479	487	491	499	503	509	521	523	541	547	557	563	569	571
577	587	593	599	601	607	613	617	619	631	641	643	647	653	659	661	673	677	683	691	701
709	719	727	733	739	743	751	757	761	769	773	787	797	809	811	821	823	827	829	839	853
857	859	863	877	881	883	887	907	911	919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	991	997

ДЕЛЕНИЕ С ОСТАТКОМ И ПРИЗНАКИ ДЕЛИМОСТИ

Теорема о делении с остатком

Для любой пары чисел a и b ($b \neq 0$) существует, и притом единственная, пара целых чисел q и r, таких, что $a = bq + r$, где $0 \leqslant r < \lvert b \rvert$ (q — неполное частное от деления a на b, r — остаток от деления a на b) Если при делении a на b остаток $r = 0$, это означает, что **a делится на b** ($a \vdots b$)	**Примеры** 1. При делении 37 на 5 неполное частное $q = 7$ и остаток $r = 2$, так как $37 = 5 \cdot 7 + 2$. 2. При делении (−37) на 5 неполное частное $q = -8$ и остаток $r = 3$, так как $-37 = 5 \cdot (-8) + 3$ (остаток не бывает отрицательным!)

Прием нахождения остатка при делении на число m ($m \in N$)

Пример. Найти остаток при делении числа $A = 1997^{1998} + 1999^{2000}$ на 37. *Решение.* 1999 при делении на 37 дает в остатке 1; 1997 при делении на 37 дает в остатке 36, но такой же самый остаток дает и число −1 ($-1 = 37 \cdot (-1) + 36$). Тогда число A при делении на 37 дает остаток $(-1)^{1998} + 1^{2000}$, т. е. 2	1. Убеждаемся, что данное числовое выражение содержит только суммы, произведения и степени целых чисел. 2. Для каждого слагаемого, множителя или основания степени находим его остаток r при делении на m (если остаток больше $\frac{m}{2}$, то иногда удобно вместо остатка r взять отрицательное число $r - m$, которое дает тот же остаток r при делении на m). 3. Подставляем полученные числа в данное выражение (вместо соответствующих слагаемых, множителей или оснований степеней) и получаем число, которое дает тот же остаток при делении на m, что и данное выражение

Признаки делимости

Данное число делится на число m, если выполняются указанные ниже условия.
Остатки при делении на m данного числа и числа, выделенного в признаке, совпадают

Делимость на m	**Условие**
На 2	*Последняя цифра числа делится на 2 (четная).*
На 5	*Последняя цифра числа 0 или 5.*
На 10^k	*Число оканчивается на k нулей.*
На 4	*Число, выраженное двумя последними цифрами данного числа, делится на 4.*
На 8	*Число, выраженное тремя последними цифрами данного числа, делится на 8.*
На 3	*Сумма цифр числа делится на 3.*
На 9	*Сумма цифр числа делится на 9.*
На 11	*Разность между суммой цифр, стоящих на нечетных местах (считая справа налево), и суммой цифр, стоящих на четных местах, делится на 11*

НОД И НОК ДВУХ ЧИСЕЛ. ВЗАИМНО ПРОСТЫЕ ЧИСЛА

Наибольший общий делитель (НОД)

Определение. ***Наибольшим общим делителем*** двух или нескольких натуральных чисел называют наибольшее натуральное число, на которое делится каждое из данных чисел	**Примеры** НОД (12; 18) = 6; НОД (50; 65; 80) = 5

Взаимно простые числа

Определение. Два натуральных числа называют ***взаимно простыми***, если их НОД равен единице	**Пример** 8 и 15 — взаимно простые числа, так как НОД (8; 15) = 1

Нахождение НОД двух натуральных чисел

Алгоритм	Примеры
I. С помощью разложения на простые множители: 1) разложить данные числа на простые множители (в каноническом виде $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$); 2) составить произведение из общих простых множителей, взятых с наименьшим показателем степени; 3) найти значение полученного произведения	$a = 280 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7$ $b = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$ Тогда НОД $(a;\ b) = 2^2 \cdot 5^1 = 20$
II. С помощью алгоритма Евклида 1. Опорное свойство. Если $a = bq + r$, то НОД $(a;\ b)$ = НОД $(b;\ r)$ 2. **Алгоритм Евклида** $(a > b)$: 1) разделить a на b с остатком $a = bq + r_1$; 2) разделить делитель b на остаток r_1: $b = r_1q_1 + r_2$; 3) разделить новый делитель r_1 на новый остаток r_2: $r_1 = r_2q_2 + r_3$ и т. д. **Последний отличный от нуля остаток и является НОД**	$(a = 280;\ b = 60)$ $\begin{array}{r\|l} 280 & 60 \\ 240 & 4 \\ 60 & 40 \\ 40 & 1 \\ 40 & 20 \\ 40 & 2 \\ 0 & \end{array}$ НОД (280; 60) = = НОД (60; 40) = = НОД (40; 20) = 20
III. Если a делится на b, то **НОД $(a;\ b) = b$**	НОД (180; 60) = 60, так как 180 делится на 60

Наименьшее общее кратное (НОК)

Определение. ***Наименьшим общим кратным*** двух или нескольких натуральных чисел называют наименьшее натуральное число, которое делится на каждое из данных чисел	**Примеры** НОК (12; 18) = 36; НОК (5; 8; 10) = 40

Нахождение НОК двух натуральных чисел

Алгоритм	Примеры
I. 1) Разложить данные числа на простые множители (в каноническом виде: $a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_k^{\alpha_k}$); 2) составить произведение из всех получившихся простых множителей, взяв каждый из них с наибольшим показателем степени; 3) найти значение полученного произведения.	$a = 280 = 2^3 \cdot 5 \cdot 7$; $b = 60 = 2^2 \cdot 3 \cdot 5$. Тогда НОК $(a;\ b) = 2^3 \cdot 3^1 \cdot 5^1 \cdot 7^1 = 840$
Частный случай Если a делится на b, то НОК $(a;\ b) = a$	НОК (180; 60) = 60; так как 180 делится на 60
II. НОК можно найти также по формуле $\boxed{\text{НОК}\,(a;\ b) = \dfrac{ab}{\text{НОД}\,(a;\ b)}}$	$\text{НОК}\,(280;\ 60) = \dfrac{280 \cdot 60}{\text{НОД}\,(280;\ 60)} = \dfrac{280 \cdot 60}{20} = 840$

Связь между НОД и НОК двух чисел

$\boxed{\text{НОД}\,(a;\ b) \cdot \text{НОК}\,(a;\ b) = ab}$	*Произведение НОД и НОК двух натуральных чисел равно произведению этих чисел*

ПРОЦЕНТЫ

Определение. ***Процентом*** называют сотую часть целого (принимаемого за единицу).

> 1 % от числа a составляет $\frac{1}{100}a$

Основные задачи на проценты

1. Нахождение процента от числа

p % от числа a составляет $\frac{p}{100}a$	**Пример.** Найти 7 % от числа 300. *Решение.* $\frac{7}{100} \cdot 300 = 21$

2. Нахождение числа по заданной величине его процента

Если p % от какого-то числа равно b, то само это число равно $b : \frac{p}{100} = \frac{b \cdot 100}{p}$	**Пример.** Найти число, 30 % которого равно 24. *Решение.* Искомое число x является решением уравнения $\frac{30}{100} \cdot x = 24$, откуда $x = 24 : \frac{30}{100} = 80$

3. Нахождение процентного отношения двух чисел

Число a составляет $\frac{a}{b} \cdot 100\,\%$ от числа b	**Пример.** Сколько процентов составляет число 26 от числа 65? *Решение.* Искомое число процентов x удовлетворяет уравнению $\frac{x}{100} \cdot 65 = 26$, откуда $x = \frac{26}{65} \cdot 100 = 40$ (%)

4. Сложные проценты

Понятие сложного процента. Если данное число ежегодно (ежемесячно, ежедневно и т. п.) увеличивается на p % без изъятия прироста (т. е. прирост за год добавляется к первоначальной величине и проценты за следующий год исчисляются с наращенной величины), то в этом случае говорят о сложных процентах (аналогично, если ежегодно «число уменьшается на p %»)

Вычисление сложных процентов

Следить за изменением заданного числа при вычислении сложных процентов удобно с помощью следующих таблиц, введя ***коэффициент увеличения (уменьшения) k***

	1-й год	**2-й год**	**3-й год**	**...**	**n-й год**
Ежегодное увеличение на p % $\left(k = 1 + \frac{p}{100}\right)$					
Было	a	ka	k^2a		
Увеличилось за год	$\frac{p}{100} \cdot a$	$\frac{p}{100} \cdot ka$	$\frac{p}{100} \cdot k^2a$	...	...
Стало	$a + \frac{p}{100} \cdot a = \left(1 + \frac{p}{100}\right)a = ka$	$ka + \frac{p}{100} \cdot ka = \left(1 + \frac{p}{100}\right)ka = k^2a$	$k^2a + \frac{p}{100} \cdot k^2a = \left(1 + \frac{p}{100}\right)k^2a = k^3a$	...	k^na
Ежегодное уменьшение на p % $\left(k = 1 - \frac{p}{100}\right)$					
Было	a	ka	k^2a		
Уменьшилось за год	$\frac{p}{100} \cdot a$	$\frac{p}{100} \cdot ka$	$\frac{p}{100} \cdot k^2a$	...	...
Стало	$a - \frac{p}{100} \cdot a = \left(1 - \frac{p}{100}\right)a = ka$	$ka - \frac{p}{100} \cdot ka = \left(1 - \frac{p}{100}\right)ka = k^2a$	$k^2a - \frac{p}{100} \cdot k^2a = \left(1 - \frac{p}{100}\right)k^2a = k^3a$	...	k^na

ПРОПОРЦИИ

Определение. ***Пропорцией*** называют равенство двух числовых отношений.
(***Отношением*** называют частное от деления одного числа на другое.)

$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ или $a:b=c:d$ $(a, b, c, d \neq 0)$	a и d — крайние члены пропорции; b и c — средние члены пропорции. Каждый член пропорции называют четвертым пропорциональным по отношению к остальным трем

Свойства пропорции

$ad = bc$	***Произведение крайних членов пропорции равно произведению ее средних членов***
$a=\frac{bc}{d}$; $d=\frac{bc}{a}$	Каждый крайний член пропорции равен произведению ее средних членов, деленному на другой крайний
$b=\frac{ad}{c}$; $c=\frac{ad}{b}$	Каждый средний член пропорции равен произведению ее крайних членов, деленному на другой средний
Одновременно справедливы такие пропорции: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$; $\frac{a}{c}=\frac{b}{d}$; $\frac{d}{b}=\frac{c}{a}$; $\frac{d}{c}=\frac{b}{a}$	В каждой пропорции можно поменять местами или только средние члены, или только крайние, или и те и другие одновременно

Производные пропорции

Если данная пропорция $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то справедливо соотношение

$$\boxed{\frac{ma+nb}{pa+qb}=\frac{mc+nd}{pc+qd}},$$

называемое **производной пропорцией**
(где m, n, p, q — любые числа и $ma + nb$, $pa + qb$, $mc + nd$, $pc + qd \neq 0$)

Наиболее часто употребляемые производные пропорции

Если $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, то: 1) $\boxed{\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}}$, 2) $\boxed{\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}}$, 3) $\boxed{\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}}$,

4) $\boxed{\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}}$, 5) $\boxed{\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}}$, 6) $\boxed{\frac{a-b}{a+b}=\frac{c-d}{c+d}}$.

Свойство равенства нескольких отношений

Из равенства нескольких отношений $\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}$ следует:

1) $\boxed{\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{b_1+b_2+\ldots+b_n}=\frac{a_1}{b_1}}$,

2) $\boxed{\frac{a_1m_1+a_2m_2+\ldots+a_nm_n}{b_1m_1+b_2m_2+\ldots+b_nm_n}=\frac{a_1}{b_1}}$,

где m_1, m_2, ..., m_n — любые числа и $b_1m_1 + b_2m_2 + \ldots + b_nm_n \neq 0$

ОДНОЧЛЕНЫ, МНОГОЧЛЕНЫ И ДЕЙСТВИЯ НАД НИМИ

Одночлены

Определения	Примеры
Одночленом *называют конечное произведение чисел, букв и их натуральных степеней, а также сами числа, буквы и их степени.* **Число 0 называют *нулевым одночленом***	0; $3a^2x$; $-\frac{2}{3}ab^3$; 5; y; x^6 — одночлены
Степенью одночлена называют сумму показателей букв, входящих в одночлен. Если одночленом является число, не равное нулю, то его степень считается равной нулю. **Число 0 степени не имеет**	$3a^3b^2c$ — одночлен шестой степени $(3 + 2 + 1 = 6)$; $5ax^3$ — одночлен четвертой степени $(1 + 3 = 4)$; 7 — одночлен нулевой степени
Если в запись одночлена входит переменная x в степени k (x^k), то говорят, что этот **одночлен имеет по x** (или относительно x) **степень k**	$5ax^3$ — одночлен третьей степени относительно переменной x
Одночлен записан в **стандартном виде**, если первый его множитель — число, называемое ***коэффициентом одночлена***, а следующие множители — буквы в некоторых степенях, расположенные по алфавиту (латинскому или греческому)	$7a^5b^3c^6$; $-4xy^3z^2$; $3\alpha^2\beta\gamma^3$ — одночлены в стандартном виде
Одночлены называют ***подобными***, если они равны между собой или различаются только своими коэффициентами	$4a^3b^2$; $-7a^3b^2$; $\frac{2}{3}a^3b^2$ — подобные одночлены

Действия над одночленами

Сложение и вычитание	$3a^2 + ab + b^2 + 5a^2 - 3ab = 8a^2 - 2ab + b^2$
Умножение	$(4a^3b^2c)\cdot(-2a^4bd) = -8a^7b^3cd$
Возведение в степень	$(2x^2y)^3 = 2^3\cdot(x^2)^3y^3 = 8x^6y^3$
Деление	$(18a^6b^4c):(3a^3b^2c) = \frac{18a^6b^4c}{3a^3b^2c} = 6a^3b^2$

Многочлены

Определения	Примеры
Многочленом *называют сумму конечного числа одночленов (каждый из которых называют членом многочлена).* Одночлены также считаются многочленами, состоящими из одного члена. **Число 0 называется *нулевым многочленом***	$5a^2b + ab + 3$; $2x^3 - 5x^2 + 1$ — многочлены (здесь $-5x^2 = +(-5)x^2$); 0; $2ax^2$; 7; x — многочлены, состоящие из одного члена
Степенью ненулевого многочлена называется наибольшая степень из степеней его членов (одночленов). **Нулевой многочлен (0) степени не имеет**	$a^2 + abc - c^2$ — многочлен третьей степени (так как наибольшая степень у члена abc — третья)

Действия над многочленами	
Сложение	$(2a^2 + 3ab - 5b) + (7a^2 - 4ab + 5b) = 9a^2 - ab$
Вычитание	$(4x - 3y) - (2x + 5y) =$ $= (4x - 3y) + (-2x - 5y) = 2x - 8y$
Умножение	$(a + 5b)(a - 2b) = a^2 - 2ab + 5ab - 10b^2 =$ $= a^2 + 3ab - 10b^2$
Тождественно равные многочлены	
Определение. Два многочлена называются ***тождественно равными***, если они принимают равные значения при всех значениях букв (иногда тождественное равенство обозначают знаком «≡»)	**Пример** $(a + b)^2 \equiv a^2 + 2ab + b^2$ (при любых значениях букв a и b равенство верно)
Основные приемы разложения многочлена на множители	
Вынесение общего множителя за скобку	$15ab^2 + 3a^2 - 6a = 3a(5b^2 + a - 2)$
Метод группировки	$xy + 2yz - x - 2z =$ $= y(x + 2z) - (x + 2z) = (x + 2z)(y - 1)$
Применение формул сокращенного умножения и других формул (см. также табл. 14)	$a^2 + 10ab^2 + 25b^4 = (a + 5b^2)^2$; $a^4 + 64 = a^4 + 16a^2 + 64 - 16a^2 =$ $=(a^2 + 8)^2 - (4a)^2 = (a^2 + 8 + 4a)(a^2 + 8 - 4a)$

Таблица 14

ФОРМУЛЫ СОКРАЩЕННОГО УМНОЖЕНИЯ И РАЗЛОЖЕНИЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ВЫРАЖЕНИЙ НА МНОЖИТЕЛИ

$\boxed{(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2}$	**Квадрат суммы** двух чисел равен квадрату первого числа плюс удвоенное произведение первого числа на второе плюс квадрат второго числа
$\boxed{(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2}$	**Квадрат разности** двух чисел равен квадрату первого числа минус удвоенное произведение первого числа на второе плюс квадрат второго числа
$\boxed{a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)}$	**Разность квадратов** двух чисел равна произведению суммы этих чисел на их разность
$(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$ $(a + b)^3 = a^3 + b^3 + 3ab(a + b)$	**Куб суммы** двух чисел равен кубу первого числа плюс утроенное произведение квадрата первого числа на второе плюс утроенное произведение первого числа на квадрат второго плюс куб второго числа
$(a - b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$ $(a - b)^3 = a^3 - b^3 - 3ab(a - b)$	**Куб разности** двух чисел равен кубу первого числа минус утроенное произведение квадрата первого числа на второе плюс утроенное произведение первого числа на квадрат второго минус куб второго числа
$\boxed{a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)}$	**Сумма кубов** двух чисел равна произведению суммы этих чисел на неполный квадрат разности этих чисел

$a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$	**Разность кубов** двух чисел равна произведению разности этих чисел на неполный квадрат суммы этих чисел
$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$	**Квадрат суммы** нескольких выражений равен сумме квадратов всех слагаемых плюс все удвоенные произведения каждого выражения на каждое последующее

Разложение на множители квадратного трехчлена и некоторых многочленов

Квадратный трехчлен

$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$, где x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена, т. е. корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$

Обобщения

1. ***Если для многочлена n-й степени от переменной x известны n его корней*** $x_1; x_2; ...; x_n$, то

$$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_{n-1}x + a_n = a_0(x - x_1)(x - x_2)...(x - x_n) \quad (a_0 \neq 0)$$

2. ***Если для многочлена $f(x)$ известен только один корень*** $x = \alpha$ (т. е. α — один из корней уравнения $f(x) = 0$), тогда этот многочлен делится нацело на $x - \alpha$ и его можно записать следующим образом:

$$f(x) = (x - \alpha)\cdot g(x)$$
(α — корень уравнения $f(x) = 0$),

где $g(x)$ можно найти, например, делением «уголком» многочлена $f(x)$ на двучлен $x - \alpha$ (см. табл. 15)

Обобщение некоторых формул сокращенного умножения

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + a^2b^{n-3} + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Примеры

1. $a^4 - b^4 = (a - b)(a^3 + a^2b + ab^2 + b^3)$.
2. $a^5 - b^5 = (a - b)(a^4 + a^3b + a^2b^2 + ab^3 + b^4)$.
3. При $b = 1$ $a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + ... + a^2 + a + 1)$

Для **нечетных** натуральных n

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - ... + a^2b^{n-3} - ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Примеры

1. $a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + b^4)$.
2. При $b = 1$ ($n = 2k + 1$ — нечетное число)

$$a^{2k+1} + 1 = (a + 1)(a^{2k} - a^{2k-1} + a^{2k-2} - ... + a^2 - a + 1)$$

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac)$$

Степень двучлена (бином Ньютона)

$(a + b)^n = a^n + \alpha_1a^{n-1}b + \alpha_2a^{n-2}b^2 + ... + \alpha_{n-2}a^2b^{n-2} + \alpha_{n-1}ab^{n-1} + b^n$ (см. также табл. 84), где коэффициенты этого разложения.

$1; \alpha_1; \alpha_2; ...; \alpha_{n-2}; \alpha_{n-1}; 1$ можно взять из таблицы, именуемой **треугольником Паскаля**

Степень	Коэффициенты разложения													
$(a+b)^0$							1							
$(a+b)^1$						1		1						
$(a+b)^2$					1		2		1					
$(a+b)^3$				1		3		3		1				
$(a+b)^4$			1		4		6		4		1			
$(a+b)^5$		1		5		10		10		5		1		
$(a+b)^6$	1		6		15		20		15		6		1	
....	....													

В этой таблице в каждой строке по краям стоят единицы, а каждое из остальных чисел равно сумме двух чисел, находящихся над ним слева и справа

Пример. $(a + b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

МНОГОЧЛЕН ОТ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Определение. ***Многочленом стандартного вида*** от одной переменной x называют многочлен вида $P(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n$, где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — числовые коеэффициенты

Если $a_0 \neq 0$, то этот многочлен называют ***многочленом n-й степени*** относительно переменной x. Член a_0x^n $(a_0 \neq 0)$ называют ***старшим членом*** многочлена $P(x)$, a_n — ***его свободным членом***	**Примеры** 1. $3x^3 - 5x^2 + 1$ — многочлен третьей степени. 2. $0x^3 + 4x^2 - 6$ — многочлен второй степени

Тождественно равные многочлены от одной переменной

Определение. Два многочлена называют ***тождественно равными***, если они принимают равные значения при всех значениях переменной.

(Иногда тождественное равенство обозначают знаком «≡».)

Свойства тождественного равенства многочленов от одной переменной

1. **Если многочлен $P(x)$ тождественно равен нулю** (т. е. принимает нулевые значения при всех значениях x), **то все его коэффициенты равны нулю**

$$\boxed{\begin{matrix} a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + a_n \equiv 0 \\ \text{(при всех значениях } x\text{)} \end{matrix}} \Leftrightarrow \boxed{a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0}$$

2. **Если два многочлена $P(x)$ и $Q(x)$ тождественно равны** (т. е. принимают одинаковые значения при всех значениях x), то они совпадают (т. е. **их степени одинаковы и коэффициенты при одинаковых степенях равны**)	**Пример** Если известно, что тождественно равны многочлены $2x^2 - 5x + b$ и $ax^3 + cx^2 + dx + 1$, то $a = 0$, $c = 2$, $d = -5$, $b = 1$

Деление многочлена на многочлен

Определение. Если для двух многочленов $A(x)$ и $B(x)$ можно найти такой многочлен $Q(x)$, что $A(x) = B(x) \cdot Q(x)$, то говорят, что $A(x)$ делится на $B(x)$. $\boxed{A(x) \vdots B(x)} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix}\text{Можно найти } Q(x)\text{:} \\ A(x) = B(x) \cdot Q(x)\end{matrix}}$	**Пример** Так как $x^2 - 4 = (x - 2)(x + 2)$, то многочлен $A(x) = x^2 - 4$ делится на многочлен $B(x) = x - 2$ (при делении получаем частное $Q(x) = x + 2$)

Деление многочлена на многочлен с остатком

Определение. *Многочлен $A(x)$ делится на многочлен $B(x)$ с остатком, если можно найти такую пару многочленов $Q(x)$ и $R(x)$, что $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$, причем степень остатка $R(x)$ меньше степени $B(x)$.* В случае, когда степень делимого $A(x)$ меньше степени делителя $B(x)$, считают, что неполное частное $Q(x) = 0$ и остаток $R(x) = A(x)$. ***Если остаток $R(x) = 0$, то многочлен $A(x)$ делится на многочлен $B(x)$ (без остатка)***	**Пример** $\underbrace{x^2 - x + 1}_{A(x)} = \underbrace{(x - 1)}_{B(x)} \cdot \underbrace{x}_{Q(x)} + \underbrace{1}_{R(x)}$ $A(x) = B(x) \cdot Q(x) + R(x)$

Деление многочлена на многочлен «уголком»	
Пример	**Правило деления многочленов от одной переменной**
Разделить многочлен $A(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x - 20$ на многочлен $B(x) = x^2 - 2x + 3$ $$\begin{array}{r\|l} -\,x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x - 20 & x^2 - 2x + 3 \\ x^4 - 2x^3 + 3x^2 \qquad\qquad & \overline{x^2 - 3x - 8} \\ \hline -\,-3x^3 - 2x^2 + 8x - 20 & \\ -3x^3 + 6x^2 - 9x \qquad & \\ \hline -\,-8x^2 + 17x - 20 & \\ -8x^2 + 16x - 24 & \\ \hline x + 4 & \end{array}$$	1. Разместить члены многочленов по убывающим степеням переменной. 2. Разделить старший член делимого на старший член делителя. 3. Полученный результат умножить на делитель и это произведение вычесть из делимого. 4. С полученной разностью производят аналогичные операции: делят ее старший член на старший член делителя, полученный результат снова умножают на делитель и т. д. Этот процесс продолжают до тех пор, пока не получат в остатке нуль (если один многочлен делится на другой) или многочлен, степень которого меньше степени делителя
Результат деления можно записать следующим образом: $\underbrace{x^4 - 5x^3 + x^2 + 8x - 20}_{A(x)} = \underbrace{(x^2 - 2x + 3)}_{B(x)} \cdot \underbrace{(x^2 - 3x - 8)}_{Q(x)} + \underbrace{x + 4}_{R(x)}$	
Теорема Безу	
Остаток от деления многочлена $P(x)$ на двучлен $x - a$ равен $P(a)$ **Следствие** ***Если $x = \alpha$ — корень многочлена $P(x)$ (т. е. $P(\alpha) = 0$), то этот многочлен делится на двучлен $x - \alpha$ без остатка***	**Пример.** Остаток от деления многочлена $P(x) = 2x^5 - x^3 + x - 2$ на двучлен $x - 1$ равен $P(1) = 2 - 1 + 1 - 2 = 0$, т. е. $P(x)$ делится на $x - 1$ без остатка. Разделив $P(x)$ на $x - 1$ «уголком» или по схеме Горнера, получаем $P(x) = 2x^5 - x^3 + x - 2 = (x - 1)(2x^4 + 2x^3 + x^2 + x + 2)$

Таблица 16

КОРНИ МНОГОЧЛЕНА ОТ ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ. ФОРМУЛЫ ВИЕТА	
Определение. Число α называют ***корнем многочлена*** $f(x)$, если $f(\alpha) = 0$ (т. е. α является корнем уравнения $f(x) = 0$)	**Пример.** Число 3 — корень многочлена $f(x) = x^4 - 20x - 21$, поскольку $f(3) = 81 - 60 - 21 = 0$
Простейшие свойства корней	
1. Если число α является корнем многочлена $f(x)$, то этот многочлен делится на двучлен $x - \alpha$ без остатка — следствие из теоремы Безу (см. табл. 15)	**Пример.** Так как $x = 2$ — корень многочлена $x^3 + x^2 - 3x - 6$, то этот многочлен делится на $x - 2$. (Действительно, $x^3 + x^2 - 3x - 6 = (x - 2)(x^2 + 3x + 3)$)
2. ***Многочлен степени n может иметь не более n корней*** 3. Если для многочлена $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n$ известны n корней: $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, то этот многочлен можно разложить на множители так: $$a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_n = a_0(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdot\ldots\cdot(x - \alpha_n) \quad (*)$$	**Пример.** Для многочлена $f(x) = 2x^3 - 4x^2 - 2x + 4$ корнями являются числа: -1, 1, 2. Тогда $2x^3 - 4x^2 - 2x + 4 = 2(x + 1)(x - 1)(x - 2)$

Формулы Виета	
Если $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n$, — корни многочлена $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + ... + a_n$ $(a_0 \neq 0)$, то, сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях x, стоящих в левой и правой частях тождества (*), получаем соотношения между корнями многочлена и его коэффициентами, которые называют **формулами Виета**	$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n=-\dfrac{a_1}{a_0} \\ \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+...+\alpha_{n-1}\alpha_n=\dfrac{a_2}{a_0} \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3+\alpha_1\alpha_2\alpha_4+...+\alpha_{n-2}\alpha_{n-1}\alpha_n=-\dfrac{a_3}{a_0} \\ \dots\dots\dots \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdot...\cdot\alpha_n=(-1)^n\dfrac{a_n}{a_0} \end{cases} \quad (1)$$
При $n = 2$ **для квадратного трехчлена** $f(x) = a_0x^2 + a_1x + a_2$ $(a_0 \neq 0)$ имеем: $$\alpha_1+\alpha_2=-\frac{a_1}{a_0};\quad \alpha_1\alpha_2=\frac{a_2}{a_0}$$ (см. также табл. 49)	При $n = 3$ **для кубического многочлена** $f(x) = a_0x^3 + a_1x^2 + a_2x + a_3$ $(a_0 \neq 0)$ имеем: $$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+...+\alpha_n=-\dfrac{a_1}{a_0} \\ \alpha_1\alpha_2+\alpha_1\alpha_3+...+\alpha_2\alpha_3=\dfrac{a_2}{a_0} \\ \alpha_1\alpha_2\alpha_3=-\dfrac{a_3}{a_0} \end{cases}$$

Как и для квадратного трехчлена (табл. 49), для произвольного многочлена справедливо **обратное утверждение:**

если для чисел $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n$ выполняются соотношения (1), то эти числа являются корнями многочлена $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$ (т. е. корнями уравнения $a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n = 0$)

Таблица 17

РАЦИОНАЛЬНЫЕ КОРНИ МНОГОЧЛЕНА С ЦЕЛЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Целые корни

Пусть дан многочлен $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$ (или уравнение $a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n = 0$). ***Любой целый корень многочлена с целыми коэффициентами является делителем его свободного члена***	**Пример.** Решить уравнение $3x^3 - 5x^2 - 4 = 0$. *Решение.* Пробуем найти целые корни среди делителей свободного члена (-4), т. е. среди чисел ±1, ±2, ±4. Последовательно подставляя эти числа в уравнение, находим, что $x = 2$ — корень уравнения ($3 \cdot 2^3 - 5 \cdot 2^2 - 4 = 0$ — верное равенство). Тогда многочлен $3x^3 - 5x^2 - 4$ делится без остатка на $x - 2$ (табл. 15). Выполнив деление (табл. 15), получаем $$3x^3 - 5x^2 - 4 = (x - 2)(3x^2 + x + 2)$$ и подставляем это выражение в исходное уравнение. Имеем $$(x - 2)(3x^2 + x + 2) = 0.$$ Тогда $x - 2 = 0$ или $3x^2 + x + 2 = 0$. Из первого уравнения получаем $x = 2$, а второе уравнение действительных корней не имеет ($D < 0$). Таким образом, исходное уравнение имеет единственный действительный корень $x = 2$

Рациональные корни многочлена с целыми коэффициентами	
Пусть задан многочлен $f(x) = a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n$ (или уравнение $a_0x^n + a_1x^{n-1} + ... + a_n = 0$). ***Для любого рационального корня $x = \frac{p}{q}$ ($q \neq 0$) многочлена с целыми коэффициентами p есть делитель свободного члена (a_n), а q — делитель коэффициента при старшем члене (a_0).*** **Следствие** Если коэффициент при старшем члене уравнения с целыми коэффициентами равен единице, то все рациональные корни этого уравнения (если они существуют) — целые числа	**Пример.** Решить уравнение $2x^3 - x^2 + 12x - 6$ *Решение.* Пробуем найти корень этого уравнения в виде несократимой дроби $\frac{p}{q}$. Тогда p следует искать среди делителей свободного члена, т. е. среди чисел ±1, ±2, ±3, ±6, а q — среди делителей коэффициента при старшем члене: ±1, ±2, т. е. рациональные корни многочлена нужно искать среди чисел $\pm\frac{1}{2}$, ±1, $\pm\frac{3}{2}$, ±2, ±3, ±6. Последовательно подставляя эти числа в уравнение, находим, что $x = \frac{1}{2}$ — корень уравнения $\left(2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 12\cdot\left(\frac{1}{2}\right) - 6\right.$ — верное равенство). Тогда многочлен $2x^3 - x^2 + 12x - 6$ делится без остатка на $x - \frac{1}{2}$ (табл. 15). Выполнив деление, получаем $2x^3 - x^2 + 12x - 6 = \left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 + 12)$. Подставляя это выражение в исходное уравнение, имеем $\left(x - \frac{1}{2}\right)(2x^2 + 12) = 0$. Тогда $x - \frac{1}{2} = 0$ или $2x^2 + 12 = 0$. Из первого уравнения получаем корень $x = \frac{1}{2}$, а второе уравнение действительных корней не имеет, т. е. данное уравнение имеет единственный действительный корень $x = \frac{1}{2}$

Таблица 18

СТЕПЕНИ	
Степень с натуральным показателем	
$\boxed{a^1 = a}$ $\boxed{a^n = \underbrace{a\cdot a\cdot ...\cdot a}_{n \text{ раз}}}$ $a \in R$, $n \in N$, $n \geq 2$	**Примеры.** $3^1 = 3$; $2^4 = 2\cdot2\cdot2\cdot2 = 16$; $(-5)^3 = (-5)\cdot(-5)\cdot(-5) = -125$ $0^n = 0$; $1^n = 1$; $n \in N$
Степень с целым показателем	
$\boxed{a^0 = 1}$ $a \neq 0$	**Примеры.** $5^0 = 1$; $(-3)^0 = 1$ 0^0 — не определена
$\boxed{a^{-n} = \frac{1}{a^n}}$ $a \neq 0$, $n \in N$	**Примеры.** $7^{-1} = \frac{1}{7}$, $2^{-3} = \frac{1}{2^3} = \frac{1}{8}$, $(-5)^{-2} = \frac{1}{(-5)^2} = \frac{1}{25}$ 0^{-3} — не определена
Степень с дробным показателем	
$\boxed{a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}}$ $a \geq 0$, $n \in N$, $n \geq 2$	**Примеры.** $16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$, $(-8)^{\frac{1}{3}}$ — не определена

$\boxed{a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}}$ $a > 0,\ n \in N,\ n \geqslant 2,\ m \in Z$	**Примеры.** $16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = 2^3 = 8;\ 3^{-\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^{-2}} = \sqrt[5]{\frac{1}{9}}$
Свойства степеней	
1. $a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$a^{m+n} = a^m \cdot a^n$
2. $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$	$a^{m-n} = \frac{a^m}{a^n}$
3. $(a^m)^n = a^{mn}$	$a^{mn} = (a^m)^n = (a^n)^m$
4. $(ab)^n = a^n \cdot b^n$	$a^n \cdot b^n = (ab)^n$
5. $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
6. $\sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$	$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$
7. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$	**Пример.** $\left(\frac{2}{3}\right)^{-3} = \left(\frac{3}{2}\right)^3 = \frac{27}{8}$

Таблица 19

КОРЕНЬ n-й СТЕПЕНИ (n — натуральное число, $n \geqslant 2$)

Определение. ***Корнем*** n-й степени из действительного числа a называют такое число, n-я степень которого равна a	**Определение.** ***Арифметическим корнем*** n-й степени из неотрицательного числа a называют такое неотрицательное число, n-я степень которого равна a

Примеры

Формулировка	Обоснование	Обозначение	Примечание
1. Корень квадратный из 4 равен 2	$2^2 = 4$	$\sqrt{4} = 2$	Арифметический корень
2. Корень квадратный из 4 равен −2	$(-2)^2 = 4$	***Обозначения нет***	Не арифметический корень
3. Корень кубический из 27 равен 3	$3^3 = 27$	$\sqrt[3]{27} = 3$	Арифметический корень
4. Корень пятой степени из −243 равен −3	$(-3)^5 = -243$	$\sqrt[5]{-243} = 3$	Не арифметический корень

Корень четной степени из отрицательного числа не определен

Знаки $\sqrt[3]{\ }$, $\sqrt[5]{\ }$, $\sqrt[7]{\ }$, ..., $\sqrt[2k+1]{\ }$ используют для обозначения любых корней	Знаки $\sqrt{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$, $\sqrt[6]{\ }$, ..., $\sqrt[2k]{\ }$ используют для обозначения только арифметических (т. е. неотрицательных) корней. Например, $\boxed{\begin{matrix}\sqrt{a} = b, \\ a \geqslant 0\end{matrix}} \Leftrightarrow \begin{cases} b \geqslant 0 \\ b^2 = a \end{cases}$

Термины: $\sqrt[n]{a}$ — корень, n — показатель корня, a — подкоренное выражение

Область определения (в множестве действительных чисел)

для корня нечетной степени	для корня четной степени
$\sqrt[3]{a}$, $\sqrt[5]{a}$, ..., $\sqrt[2k+1]{a}$ — существует при любых значениях a ($a \in R$)	$\sqrt{a}$, $\sqrt[4]{a}$, ..., $\sqrt[2k]{a}$ — существует только при $a \geqslant 0$

СВОЙСТВА КОРНЕЙ n-й СТЕПЕНИ

1. $\boxed{\sqrt[n]{0}=0}$ **2.** $\boxed{\sqrt[n]{1}=1}$

3. $\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a}$ — по определению, причем

$\left(\sqrt[2k+1]{a}\right)^{2k+1}=a$ для любых a; $\left(\sqrt[2k]{a}\right)^{2k}=a$ только при $a\geqslant 0$

4. $\sqrt[3]{a^3}=a,\ \sqrt[5]{a^5}=a,\ \ldots,\ \boxed{\sqrt[2k+1]{a^{2k+1}}=a}$

5. $\sqrt{a^2}=|a|,\ \sqrt[4]{a^4}=|a|,\ \ldots,\ \boxed{\sqrt[2k]{a^{2k}}=|a|=\begin{cases}a, & \text{если } a\geqslant 0\\ -a, & \text{если } a<0\end{cases}}$

6. $\boxed{\left(\sqrt[n]{a}\right)^k=\sqrt[n]{a^k}}$ — для всех a из области определения выражения $\sqrt[n]{a}$

7. Корень из корня	**8. Корень из степени**
$\boxed{\sqrt[n]{\sqrt[k]{a}}=\sqrt[nk]{a}}$ — для всех a из области определения выражения $\sqrt[nk]{a}$	При $a>0$ $\boxed{\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}}}$

9. Корень из произведения и частного

Область применения формул	**Формулы**	**Примеры**
Для неотрицательных a и b ($a\geqslant 0$; $b\geqslant 0$)	$\sqrt[n]{ab}=\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{b}$ $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$ $(b\neq 0)$	$\sqrt[3]{27\cdot 8}=\sqrt[3]{27}\cdot\sqrt[3]{8}=3\cdot 2=6$; $\sqrt[4]{\dfrac{625}{16}}=\dfrac{\sqrt[4]{625}}{\sqrt[4]{16}}=\dfrac{5}{2}$
Для любых a и b	*корень нечетной степени*	
	$\sqrt[2k+1]{ab}=\sqrt[2k+1]{a}\cdot\sqrt[2k+1]{b}$ $\sqrt[2k+1]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[2k+1]{a}}{\sqrt[2k+1]{b}}$ $(b\neq 0)$	$\sqrt[5]{a^5b^5}=\sqrt[5]{a^5}\cdot\sqrt[5]{b^5}=ab$; $\sqrt[3]{\dfrac{-64}{125}}=\dfrac{\sqrt[3]{-64}}{\sqrt[3]{125}}=\dfrac{-4}{5}=-\dfrac{4}{5}$
	корень четной степени	
	$\sqrt[2k]{ab}=\sqrt[2k]{\lvert a\rvert}\cdot\sqrt[2k]{\lvert b\rvert}$, где $ab\geqslant 0$ $\sqrt[2k]{\dfrac{a}{b}}=\dfrac{\sqrt[2k]{\lvert a\rvert}}{\sqrt[2k]{\lvert b\rvert}}$, где $\dfrac{a}{b}\geqslant 0$, $b\neq 0$	$\sqrt{(1-\sqrt{3})(1-\sqrt{5})}=$ $=\sqrt{\lvert 1-\sqrt{3}\rvert}\cdot\sqrt{\lvert 1-\sqrt{5}\rvert}=$ $=\sqrt{\sqrt{3}-1}\cdot\sqrt{\sqrt{5}-1}$

10. Основное свойство корней

При $a\geqslant 0$ $\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[nk]{a^{mk}}$ и, наоборот, $\sqrt[nk]{a^{mk}}=\sqrt[n]{a^m}$.

Значение корня из степени неотрицательного числа не изменится, если показатель корня и показатель подкоренного выражения умножить (или разделить) на одно и то же число

Особенности использования основного свойства при любых значениях a		
Умножение показателей		
Область применения формул	**Формулы**	**Примеры**
m и n — оба нечетные, а k — четное	$\sqrt[n]{a^m} = \begin{cases} \sqrt[nk]{a^{mk}}, & \text{если } a \geqslant 0; \\ -\sqrt[nk]{a^{mk}}, & \text{если } a < 0 \end{cases}$	$\sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{2^2} = \sqrt[6]{4}$; $\sqrt[3]{-2} = -\sqrt[6]{(-2)^2} = -\sqrt[6]{4}$; $\sqrt[5]{1-\sqrt{2}} = -\sqrt[10]{(1-\sqrt{2})^2}$
В остальных случаях	$\sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nk]{a^{mk}}$	$\sqrt[3]{2} = \sqrt[9]{2^3} = \sqrt[9]{8}$; $\sqrt[3]{-2} = \sqrt[9]{(-2)^3} = \sqrt[9]{-8}$
Деление показателей		
Хотя бы одно из чисел n или k — четное	$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \begin{cases} \sqrt[n]{a^m}, & \text{если } m \text{ — четное;} \\ \sqrt[n]{\lvert a \rvert^m}, & \text{если } m \text{ — нечетное.} \end{cases}$ В частности, $\boxed{\text{если } k \text{ — четное, то } \sqrt[k]{a^{mk}} = \lvert a^m \rvert}$	$\sqrt[10]{(1-\sqrt{2})^6} = \sqrt[5]{(\lvert 1-\sqrt{2} \rvert)^3} = \sqrt[5]{(\sqrt{2}-1)^3}$; $\sqrt[10]{(1-\sqrt{2})^4} = \sqrt[5]{(1-\sqrt{2})^2}$
n и k — оба нечетные	$\sqrt[nk]{a^{mk}} = \sqrt[n]{a^m}$	$\sqrt[15]{(1-\sqrt{2})^9} = \sqrt[5]{(1-\sqrt{2})^3}$
11. Вынесение множителя из-под знака корня		
Для неотрицательных a и b ($a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$)	$\boxed{\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[4]{2^4 \cdot 3} = 2\sqrt[4]{3}$; $\sqrt[3]{2^3 \cdot 3} = 2\sqrt[3]{3}$
Для произвольного a	*корень нечетной степени*	
	$\sqrt[2k+1]{a^{2k+1} b} = a\sqrt[2k+1]{b}$	$\sqrt[3]{(-2)^3 \cdot 3} = -2 \cdot \sqrt[3]{3}$; $\sqrt[5]{(1-\sqrt{2})^5 \cdot 7} = (1-\sqrt{2})\sqrt[5]{7}$
	корень четной степени	
	$\boxed{\sqrt[2k]{a^{2k} b} = \lvert a \rvert \sqrt[2k]{b},}$ где $b \geqslant 0$	$\sqrt[4]{(1-\sqrt{2})^4 \cdot 7} = \lvert 1-\sqrt{2} \rvert \cdot \sqrt[4]{7} = (\sqrt{2}-1)\sqrt[4]{7}$
12. Внесение множителя под знак корня		
Для неотрицательных a и b ($a \geqslant 0$, $b \geqslant 0$)	$\boxed{a\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{a^n b}}$	$2\sqrt[3]{5} = \sqrt[3]{2^3 \cdot 5} = \sqrt[3]{40}$; $2\sqrt[4]{3} = \sqrt[4]{2^4 \cdot 3} = \sqrt[4]{48}$
Для произвольного a	*корень нечетной степени*	
	$a\sqrt[2k+1]{b} = \sqrt[2k+1]{a^{2k+1} b}$	$(1-\sqrt{2})\sqrt[3]{7} = \sqrt[3]{(1-\sqrt{2})^3 \cdot 7}$
	корень четной степени	
	$\boxed{a\sqrt[2k]{b} = \begin{cases} \sqrt[2k]{a^{2k} b}, & \text{если } a \geqslant 0 \\ -\sqrt[2k]{a^{2k} b}, & \text{если } a < 0 \end{cases}}$, где $b \geqslant 0$	$3\sqrt{5} = \sqrt{3^2 \cdot 5} = \sqrt{45}$; $(1-\sqrt{2})\sqrt[4]{7} = -\sqrt[4]{(1-\sqrt{2})^4 \cdot 7}$

ЛОГАРИФМЫ

Определение. ***Логарифмом*** **положительного числа b ($b > 0$) по основанию a ($a > 0$, $a \neq 1$) называют показатель степени, в которую надо возвести a, чтобы получить b**	**Примеры.** 1. $\log_3 9 = 2$, так как $3^2 = 9$; 2. $\log_5 \sqrt{5} = \frac{1}{2}$, так как $5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}$

Обозначение	Специальные обозначения	
	Десятичный логарифм	Натуральный логарифм
$\boxed{\log_a b}$	$\log_{10} b = \lg b$	$\log_e b = \ln b$ ($e \approx 2{,}7182\ldots$)

Основное логарифмическое тождество

$\boxed{a^{\log_a b} = b}$ $b > 0$, $a > 0$, $a \neq 1$	**Примеры.** 1. $5^{\log_5 7} = 7$; 2. $10^{\lg 3} = 3$

Свойства и формулы логарифмирования ($a > 0$; $a \neq 1$; $x > 0$; $y > 0$)

1. $\log_a 1 = 0$	Логарифм единицы по любому основанию равен нулю
2. $\log_a a = 1$	
3. $\log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$	Логарифм произведения положительных чисел равен сумме логарифмов множителей
4. $\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$	Логарифм частного положительных чисел равен разности логарифмов делимого и делителя
5. $\log_a x^n = n \log_a x$	Логарифм степени положительного числа равен произведению показателя степени на логарифм основания этой степени

Обобщенные формулы логарифмирования

1. $\boxed{\log_a (xy) = \log_a |x| + \log_a |y|}$, где $xy > 0$

2. $\boxed{\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a |x| - \log_a |y|}$, где $\frac{x}{y} > 0$

3. $\boxed{\log_a x^{2k} = 2k \log_a |x|}$, где $x \neq 0$, $k \in Z$

Формула перехода к логарифмам с другим основанием

$$\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a} \quad (b > 0;\ a > 0;\ a \neq 1;\ c > 0;\ c \neq 1)$$

Следствия

1. $\boxed{\log_a b = \frac{1}{\log_b a}}$	2. $\boxed{\log_a b = \log_{a^k} b^k}$	3. $\boxed{\log_{a^n} a^m = \frac{m}{n}}$
$a > 0$; $a \neq 1$; $b > 0$; $b \neq 1$	$a > 0$; $a \neq 1$; $b > 0$	$a > 0$; $a \neq 1$

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ. МЕТОД МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИНДУКЦИИ

Понятие последовательности	Примеры
Последовательность — переменная величина, зависящая от натурального числа (т. е. функция натурального аргумента). **Запись.** $a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ ($a_1, a_2, ..., a_n$ — члены (элементы) последовательности). *Если элементы последовательности — действительные числа, то последовательность называют числовой. Она определена, если указан закон, по которому каждому натуральному числу n ставится в соответствие действительное число a_n*	1. 2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, ... — последовательность четных натуральных чисел. 2. −1, −2, −3, −4, −5, −6, ... — последовательность целых отрицательных чисел. 3. $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, ...$ — последовательность чисел, обратных натуральным. 4. 2, −2, 2, −2, ... — числовая последовательность

Возрастающие и убывающие последовательности

Последовательность называют **возрастающей, если $a_{n+1} > a_n$ для всех $n \in N$** (числовая последовательность, приведенная в примере 1)	Последовательность называют **убывающей, если $a_{n+1} < a_n$ для всех $n \in N$** (числовые последовательности, приведенные в примерах 2 и 3)

Суммирование (см. также табл. 23)

Если возможно, представить каждый член последовательности в виде разности

$$a_k = \varphi(k) - \varphi(k+1)$$

(где $\varphi(x)$ — какая-то функция), затем подставить $k = 1; 2; 3; ...; n$ и сложить получившиеся равенства

Пример. Найти сумму первых n членов последовательности

$$\frac{1}{1\cdot 2};\ \frac{1}{2\cdot 3};\ \frac{1}{3\cdot 4};\ ...,\ \frac{1}{n(n+1)};\ ... .$$

Решение. Произвольный член $a_k = \frac{1}{k(k+1)}$ этой последовательности можно записать следующим образом:

$$a_k = \frac{1}{k(k+1)} = \frac{1}{k} - \frac{1}{(k+1)} \quad \left(\text{здесь } \varphi(x) = \frac{1}{x}\right).$$

При $k = 1; 2; 3; ...; n$ имеем

$$\frac{1}{1\cdot 2} = 1 - \frac{1}{2};\quad \frac{1}{2\cdot 3} = \frac{1}{2} - \frac{1}{3};\quad \frac{1}{3\cdot 4} = \frac{1}{3} - \frac{1}{4};\quad ...;$$

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Складывая почленно полученные равенства, получаем

$$S = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{2\cdot 3} + \frac{1}{3\cdot 4} + ... + \frac{1}{n(n+1)} =$$

$$= 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... + \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} =$$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$$

Метод математической индукции

Используется для доказательства утверждений $A(n)$ о числовых последовательностях или о выражениях, зависящих от натурального числа, в формулировке которых явно или неявно присутствуют слова **«для любого натурального n»**

Схема доказательства утверждений с помощью метода математической индукции	**Пример.** Доказать: $1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$
1. **Проверяем,** выполняется ли данное утверждение **при $n=1$** (иногда начинают с $n=p$). 2. **Предполагаем,** что данное утверждение справедливо **при $n=k$,** где $k\geqslant 1$ (второй вариант — при $n\leqslant k$). 3. **Доказываем** (опираясь на предположение) справедливость нашего утверждения и **при $n=k+1$.** 4. **Делаем вывод,** что данное утверждение справедливо для любого натурального числа n (для любого $n\geqslant p$)	*Решение.* Для удобства записи обозначим $S_n=1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+n(n+1)$ 1. При $n=1$ равенство выполняется $\left(1\cdot 2=\frac{1}{3}\cdot 1\cdot 2\cdot 3,\right.$ т. е. $\left.2=2\right)$. 2. Предполагаем, что равенство верно при $n=k$, где $k\geqslant 1$, т. е. $S_k=1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+k(k+1)=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2).\quad (*)$ 3. Докажем, что равенство верно и при $n=k+1$, т. е. докажем, что $S_{k+1}=1\cdot 2+2\cdot 3+\ldots+k(k+1)+(k+1)(k+2)=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3).$ Учитывая, что $S_{k+1}=S_k+(k+1)(k+2)$ и подставляя S_k из (*), получаем $S_{k+1}=\frac{1}{3}k(k+1)(k+2)+(k+1)(k+2)=\frac{1}{3}(k+1)(k+2)(k+3),$ что и требовалось доказать. 4. Следовательно, данное равенство верно для любого натурального n

Таблица 23

ПРОГРЕССИИ

Арифметическая прогрессия	Геометрическая прогрессия
Определение. ***Арифметической прогрессией*** называют числовую последовательность, каждый член которой, начиная со второго, равен предыдущему члену, **сложенному** с одним и тем же числом	**Определение.** ***Геометрической прогрессией*** называют числовую последовательность, первый член которой отличен от нуля, а каждый последующий член, начиная со второго, равен предыдущему члену, **умноженному** на одно и то же не равное нулю число
Это постоянное для данной последовательности число d называют ***разностью арифметической прогрессии***	Это постоянное для данной последовательности число q называют ***знаменателем геометрической прогрессии***
Примеры	
2, 5, 8, 11, 14 ... — возрастающая арифметическая прогрессия ($d=3>0$) 18, 13, 8, 3, −2 ... — убывающая арифметическая прогрессия ($d=-5<0$)	2, 6, 18, 54, 162, ... ($q=3$); $8, -2, \frac{1}{2}, -\frac{1}{8}, \frac{1}{32}, \ldots \left(q=-\frac{1}{4}\right)$ — геометрические прогрессии
Обозначение	
$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}$ — арифметическая прогрессия	$b_1, b_2, b_3, \ldots, b_{n-1}, b_n, b_{n+1}$ — геометрическая прогрессия
$d=a_2-a_1=a_3-a_2=\ldots=a_n-a_{n-1}$ — разность прогрессии	$q=\frac{b_2}{b_1}=\frac{b_3}{b_2}=\ldots=\frac{b_n}{b_{n-1}}$ — знаменатель прогрессии

Арифметическая прогрессия	Геометрическая прогрессия
Характеристические свойства	
$a_1, a_2, ..., a_{n-1}, a_n, a_{n+1}$ — арифметическая прогрессия $\Leftrightarrow \boxed{a_n = \frac{a_{n-1}+a_{n+1}}{2}}$	$b_1, b_2, ..., b_{n-1}, b_n, b_{n+1}$ — геометрическая прогрессия $\Leftrightarrow \boxed{b_n^2 = b_{n-1}\cdot b_{n+1}}$
Любой член арифметической прогрессии, начиная со второго, равен среднему арифметическому предыдущего и последующего членов, и наоборот: если выполняется указанное свойство, то последовательность будет арифметической прогрессией	*Квадрат любого члена геометрической прогрессии, начиная со второго, равен произведению предыдущего и последующего членов, и наоборот: если выполняется указанное свойство, то последовательность будет геометрической прогрессией*
Формулы n-го члена	
1. $\boxed{a_n = a_{n-1} + d}$ (по определению) 2. $\boxed{a_n = a_1 + d(n-1)}$	1. $\boxed{b_n = b_{n-1}\cdot q}$ (по определению) 2. $\boxed{b_n = b_1 q^{n-1}}$
Формулы суммы n первых членов	
1. $\boxed{S_n = \frac{a_1+a_n}{2}\cdot n}$ 2. $\boxed{S_n = \frac{2a_1+d(n-1)}{2}\cdot n}$	1. $\boxed{S_n = \frac{b_nq-b_1}{q-1} = \frac{b_1-b_nq}{1-q}}$ 2. $\boxed{S_n = \frac{b_1(q^n-1)}{q-1} = \frac{b_1(1-q^n)}{1-q}}$

Ориентировочный план решения задач на прогрессии

1. ***Все**, о чем говорится в условии задачи (члены прогрессии, их суммы и т. д.), **выражаем через первый член и разность (или знаменатель) прогрессии.***
2. ***Составляем уравнение** (или систему уравнений) **по условию задачи.** В случае, когда в задаче происходит переход от геометрической прогрессии к арифметической и обратно, для составления уравнений обычно используют характеристические свойства прогрессий*

Бесконечная убывающая геометрическая прогрессия

Определение	Примеры
Бесконечная геометрическая прогрессия, знаменатель которой по модулю меньше единицы ($\lvert q \rvert < 1$), называется **бесконечной убывающей геометрической прогрессией**	$1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{8};\ \frac{1}{16};\ \frac{1}{32};\ ...\ \left(q=\frac{1}{2}\right)$ $-2;\ \frac{2}{3};\ -\frac{2}{9};\ \frac{2}{27};\ -\frac{2}{81};\ \frac{2}{243};\ ...\ \left(q=-\frac{1}{3}\right)$

Сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии

Определение. ***Суммой бесконечной убывающей геометрической прогрессии*** называется предел, к которому стремится сумма n ее первых членов, при бесконечном возрастании n $(n \to \infty)$

$$S = \lim_{n\to\infty} S_n$$

Формула для вычисления	Пример
$S = \frac{b_1}{1-q}$	$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+... = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = 2$

Преобразование периодической десятичной дроби в обыкновенную

Пример. $0,(6) = 0,6666... = \frac{6}{10}+\frac{6}{100}+\frac{6}{1000}+... = \frac{\frac{6}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{2}{3}$ (как сумма бесконечной убывающей геометрической прогрессии с первым членом $b_1 = \frac{6}{10}$ и знаменателем $q = \frac{1}{10}$)

Таблица 24

ФУНКЦИЯ

Определение. Зависимость переменной y от переменной x называют ***функцией***, если каждому значению x соответствует единственное значение y	**Определение.** ***Числовой функцией*** с областью определения D называют зависимость, при которой каждому числу x из множества D ставится в соответствие единственное число y, обычно обозначаемое $y = f(x)$
Функция обозначается или одной буквой f (или $f(x)$), или равенством $y = f(x)$	**Термины:** x — независимая переменная, или аргумент; y — зависимая переменная, или функция, $f(x_0)$ — значение функции f в точке x_0

Область определения и множество значений функции

Область определения функции (D) — множество тех значений, которые может принимать аргумент **(см. также табл. 25)**	***Множество значений функции*** (E) — это множество тех значений, которые может принимать сама функция при всех значениях аргумента из области определения **(это все значения a, при которых уравнение $f(x) = a$ имеет решения)**

Пример. $f(x) = \sqrt{x-1}$

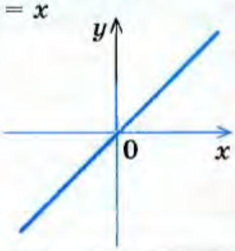
Область определения (О. О.): $x - 1 \geqslant 0$, то есть $x \in [1; +\infty)$ $(D_f = [1; +\infty))$	Множество значений: $[0; +\infty)$ $E_f = [0; +\infty)$ (поскольку $f(x) = \sqrt{x-1} \geqslant 0$ для всех $x \in D_f$ и принимает все значения от 0 до $+\infty$)

График функции

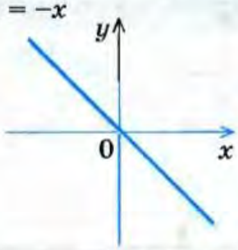
Определение. ***Графиком функции*** $y = f(x)$ называют множество всех точек плоскости с координатами $(x; f(x))$, где первая координата x «пробегает» всю область определения функции f (а вторая координата — это соответствующее значение функции f в точке x)

Графики некоторых элементарных функций

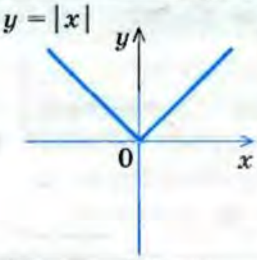
$y = x$



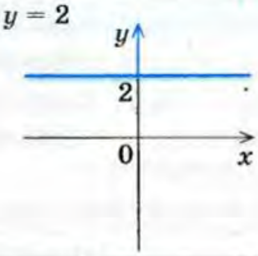
$y = -x$



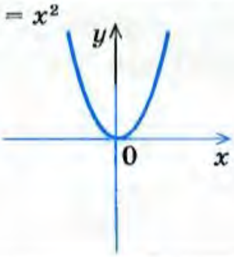
$y = |x|$



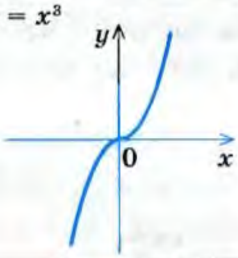
$y = 2$



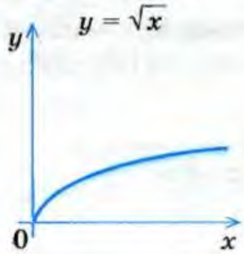
$y = x^2$



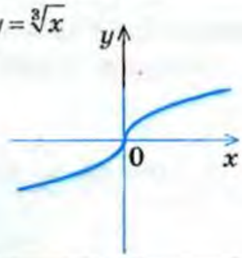
$y = x^3$



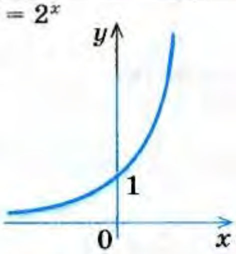
$y = \sqrt{x}$



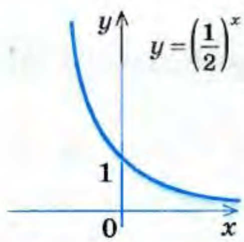
$y = \sqrt[3]{x}$



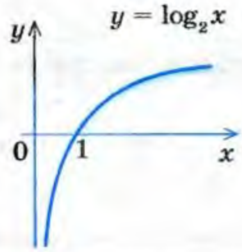
$y = 2^x$



$y = \left(\frac{1}{2}\right)^x$



$y = \log_2 x$



$y = \log_{\frac{1}{2}} x$

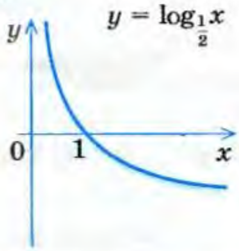


Таблица 25

КАК НАЙТИ ОБЛАСТЬ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИИ

№ п/п	Вид функции	Ограничения ($f(x)$ и $g(x)$ существуют!)	Формулировка
1	$y = \dfrac{f(x)}{g(x)}$	$g(x) \neq 0$	Знаменатель дроби не равен нулю
2	$y = \sqrt[2k]{f(x)}$	$f(x) \geqslant 0$	Под знаком корня четной степени может стоять только неотрицательное выражение
3	$y = \lg(f(x))$	$f(x) > 0$	Под знаком логарифма может стоять только положительное выражение
4	$y = \log_{f(x)} a \ (a > 0)$	$\begin{cases} f(x) > 0 \\ f(x) \neq 1 \end{cases}$	В основании логарифма может стоять только положительное выражение, не равное единице
5	$y = \operatorname{tg}(f(x))$	$f(x) \neq \dfrac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$	Под знаком тангенса может стоять только выражение, не равное $\dfrac{\pi}{2} + \pi k$ (k — целое)
6	$y = \operatorname{ctg}(f(x))$	$f(x) \neq \pi k,\ k \in Z$	Под знаком котангенса может стоять только выражение, не равное πk (k — целое)
7	$y = \arcsin(f(x))$	$\lvert f(x) \rvert \leqslant 1$ $(-1 \leqslant f(x) \leqslant 1)$	Под знаками арксинуса и арккосинуса может стоять только выражение, модуль которого меньше или равен единице
8	$y = \arccos(f(x))$		
9	$y = x^{\alpha},\ \alpha \in R$		
	а) α — натуральное число	x — любое число	
	б) α — целое отрицательное число или нуль	$x \neq 0$	
	в) α — положительное нецелое число	$x \geqslant 0$	
	г) α — отрицательное нецелое число	$x > 0$	

Таблица 26

ЧЕТНЫЕ И НЕЧЕТНЫЕ ФУНКЦИИ

Четная функция	Нечетная функция
Определение. Функцию f называют ***четной***, если ее область определения симметрична относительно начала координат и для любого x из ее области определения $f(-x) = f(x)$	**Определение.** Функцию f называют ***нечетной***, если ее область определения симметрична относительно начала координат и для любого x из ее области определения $f(-x) = -f(x)$
Свойство	**Свойство**
График четной функции симметричен относительно оси Оу	***График нечетной функции симметричен относительно начала координат***

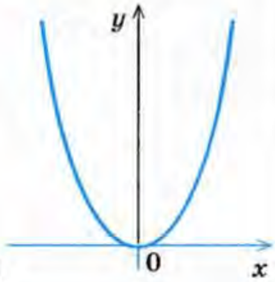
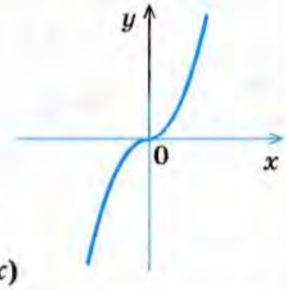
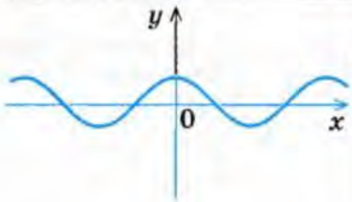
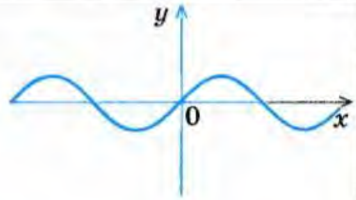
Примеры четных функций	Примеры нечетных функций
$y = x^2$  $f(-x) = (-x)^2 = x^2 = f(x)$	$y = x^3$  $f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$
$y = \cos x$  $f(-x) = \cos(-x) = \cos x = f(x)$	$y = \sin x$  $f(-x) = \sin(-x) = -\sin x = -f(x)$

Таблица 27

ВОЗРАСТАЮЩИЕ И УБЫВАЮЩИЕ ФУНКЦИИ

Возрастающая функция	Убывающая функция
Определение. Функцию f называют ***возрастающей*** на некотором множестве P, если большему значению аргумента из этого множества соответствует большее значение функции **$f(x)$ возрастает,** если для любых $x_1 \in P$, $x_2 \in P$ $\boxed{x_1 > x_2} \Rightarrow \boxed{f(x_1) > f(x_2)}$	**Определение.** Функцию f называют ***убывающей*** на некотором множестве P, если большему значению аргумента из этого множества соответствует меньшее значение функции **$f(x)$ убывает,** если для любых $x_1 \in P$, $x_2 \in P$ $\boxed{x_1 > x_2} \Rightarrow \boxed{f(x_1) < f(x_2)}$
Свойства	
1. Если функция f возрастает на некотором множестве P, то большему значению функции соответствует **большее** значение аргумента из этого множества $\boxed{\begin{array}{c} f(x) \text{ возрастает (на } P) \\ f(x_1) > f(x_2) \end{array}} \Rightarrow \boxed{x_1 > x_2}$	1. Если функция f убывает на некотором множестве P, то большему значению функции соответствует **меньшее** значение аргумента из этого множества $\boxed{\begin{array}{c} f(x) \text{ убывает (на } P) \\ f(x_1) > f(x_2) \end{array}} \Rightarrow \boxed{x_1 < x_2}$
2. *Сумма нескольких возрастающих на данном множестве функций является возрастающей функцией на этом множестве*	2. *Сумма нескольких убывающих на данном множестве функций является убывающей функцией на этом множестве*
3. Если функция f возрастает, то обратная ей функция также возрастает	3. Если функция f убывает, то обратная ей функция также убывает

Возрастание и убывание некоторых сложных функций
(функций от функций)

4. Если в сложной функции $y = f(u(x))$ функция $u = u(x)$ возрастает и функция $y = f(u)$ возрастает, то и функция $y = f(u(x))$ возрастает.
Короче: ***композиция (т. е. результат последовательного применения) двух возрастающих функций — функция возрастающая***

4. Если в сложной функции $y = f(u(x))$ функция $u = u(x)$ убывает и функция $y = f(u)$ убывает, то функция $y = f(u(x))$ возрастает.
Короче: ***композиция (т. е. результат последовательного применения) двух убывающих функций — функция возрастающая***

5. Если в сложной функции $y = f(u(x))$ функция $u = u(x)$ возрастает, а функция $y = f(u)$ убывает (или наоборот), то функция $y = f(u(x))$ убывает, т.е. ***композиция убывающей и возрастающей функций (или наоборот) — функция убывающая.***

Свойство, полезное для решения некоторых уравнений

6. ***Любая возрастающая (или убывающая) на данном множестве функция принимает каждое свое значение только в одной точке из этого множества***

$f(x)$ — возрастающая (или убывающая) функция

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow x_1 = x_2$$

Пример. Решить уравнение $x + 2^x = 3$.

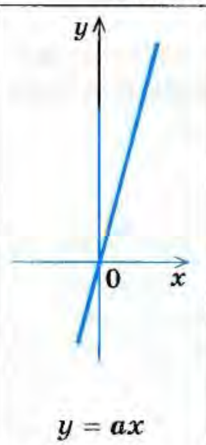
Решение. Функция $f(x) = x + 2^x$ — возрастающая (как сумма двух возрастающих функций). Поэтому значение, равное 3, она может принимать только в одной точке. Эта точка — 1 (так как $1 + 2^1 = 3$). Следовательно, данное уравнение имеет единственный корень $x = 1$

Пример. Решить уравнение $\left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x = 2$.

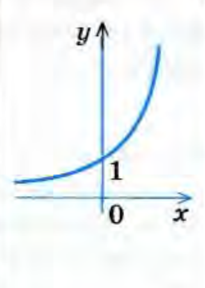
Решение. Функция $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x + \left(\frac{1}{3}\right)^x$ — убывающая (как сумма двух убывающих функций). Поэтому значение, равное 2, она может принимать только в одной точке. Эта точка — 0 (так как $\left(\frac{1}{2}\right)^0 + \left(\frac{1}{3}\right)^0 = 2$). Следовательно, данное уравнение имеет единственный корень $x = 0$

Признак возрастания функции	Признак убывания функции
Если $f'(x) > 0$ в каждой точке интервала I, то функция f возрастает на этом интервале	Если $f'(x) < 0$ в каждой точке интервала I, то функция f убывает на этом интервале

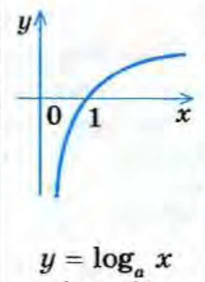
Примеры функций, возрастающих на всей области определения



$y = ax$ $(a > 0)$

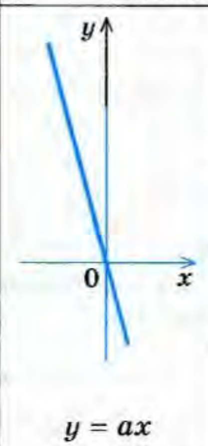


$y = a^x$ $(a > 1)$

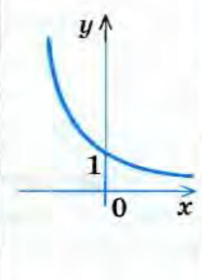


$y = \log_a x$ $(a > 1)$

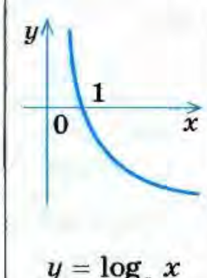
Примеры функций, убывающих на всей области определения



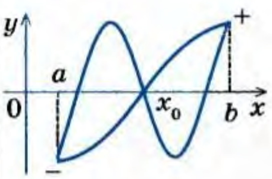
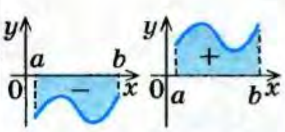
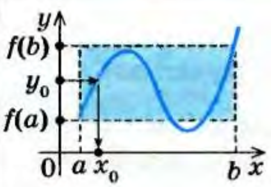
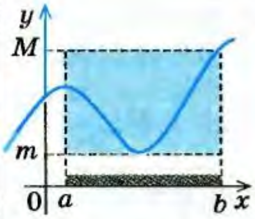
$y = ax$ $(a < 0)$



$y = a^x$ $(0 < a < 1)$



$y = \log_a x$ $(0 < a < 1)$

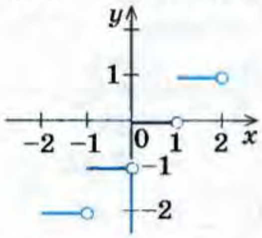
<table>
<tr><th colspan="3">НЕПРЕРЫВНОСТЬ ФУНКЦИИ</th></tr>
<tr><th colspan="2">В точке</th><th>На промежутке</th></tr>
<tr><td colspan="2">Определение. Функцию $f(x)$ называют непрерывной в точке a, если при $x \to a$ $f(x) \to f(a)$, т. е.
$$\boxed{\lim_{x \to a} f(x) = f(a)}$$</td><td>Определение. Если функция $f(x)$ непрерывна в каждой точке некоторого промежутка I, то ее называют непрерывной на промежутке I
В школьном курсе математики: график функции, непрерывной на промежутке, — непрерывная линия на этом промежутке</td></tr>
<tr><th colspan="3">Свойства</th></tr>
<tr><th>Иллюстрация</th><th>Формулировка</th><th>Пример использования</th></tr>
<tr><td></td><td>1. Если непрерывная на отрезке [a, b] функция принимает на концах этого отрезка значения разных знаков, то в некоторой точке этого отрезка она принимает значение, равное нулю</td><td>$f(x) = 4x^3 + x - 1$ — непрерывная функция (многочлен)
$f(0) = -1 < 0$; $f(1) = 4 > 0$, поэтому на интервале $(0; 1)$ существует точка x, в которой функция равна 0 (это точка $x_0 = \frac{1}{2}$)</td></tr>
<tr><td></td><td>2. Если на интервале (a, b) функция f(x) непрерывна и не превращается в нуль, то на этом интервале функция сохраняет постоянный знак</td><td>Метод интервалов применительно к решению неравенств вида $f(x) \geq 0$ (см. табл. 40)</td></tr>
<tr><td></td><td>3. Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, принимает все промежуточные значения между значениями в крайних точках, т. е. между $f(a)$ и $f(b)$</td><td>$f(x) = 2^x$ — непрерывная функция. Если $x \in [2; 3]$, то $2^2 = 4$, $2^3 = 8$. Поскольку $4 < 5 < 8$, то существует точка x_0, в которой $f(x_0) = 2^{x_0} = 5$ (как известно, $x_0 = \log_2 5$)</td></tr>
<tr><td></td><td>4. Функция $f(x)$, непрерывная на отрезке $[a, b]$, ограничена на этом отрезке, т. е. существуют такие два числа m и M, что для всех $x \in [a, b]$ выполняется неравенство $m \leq f(x) \leq M$</td><td>Правило нахождения наибольшего и наименьшего значений функции на отрезке $[a, b]$ (см. табл. 77)</td></tr>
<tr><td colspan="3">5. Сумма, разность и произведение непрерывных на данном интервале функций — функция, непрерывная на том же интервале. Частное двух непрерывных функций — функция, непрерывная во всех точках, в которых знаменатель не обращается в нуль</td></tr>
<tr><td colspan="3">6. Функция, обратная непрерывной функции на данном интервале, непрерывна на этом интервале</td></tr>
<tr><td colspan="3">7. Если функция $f(x)$ имеет производную в точке x_0, то она непрерывна в этой точке</td></tr>
</table>

Точки разрыва

Точка a — это **точка разрыва функции** $f(x)$ (и ее графика), если в точке a не выполняется условие, что при $x \to a$ $f(x) \to f(a)$

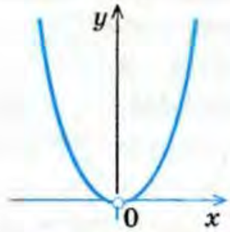
Примеры функций, содержащих точки разрыва

$y = [x]$ — целая часть x



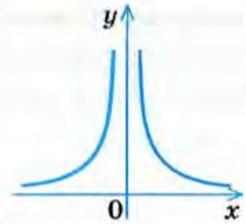
Точки разрыва — все целочисленные точки

$y = \frac{x^3}{x}$



0 — точка разрыва

$y = \frac{1}{x^2}$



0 — точка разрыва

Таблица 29

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

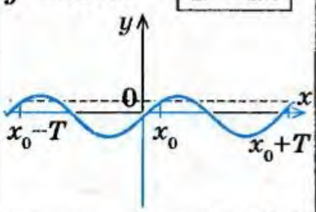
Определение. Функцию f называют ***периодической*** с периодом $T \neq 0$, если для любого x из области определения числа $f(x + T) = f(x - T) = f(x)$

Свойства

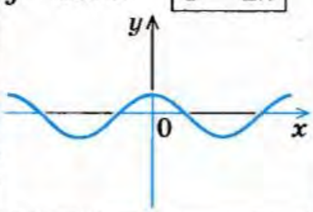
1. Если число T — период функции f, то число $k \cdot T$ ($k \in N$) также является периодом этой функции
2. *Если функция $y = f(x)$ периодическая с периодом T, то функция $y = Af(kx + b)$ также периодическая и ее период равен $\frac{T}{|k|}$ (A, k, b — постоянные числа и $k \neq 0$)*
3. Если функция $y = f(x)$ периодическая с периодом T, то сложная функция (функция от функции) $y = \varphi(f(x))$ также *периодическая* с периодом T (хотя, возможно, этот период и не является наименьшим по абсолютной величине)
4. *Для построения графика периодической функции с периодом T достаточно построить график на отрезке длиной T, а далее — параллельно перенести этот график вдоль оси Ox на расстояние nT ($n \in N$) влево и вправо*

Примеры периодических функций

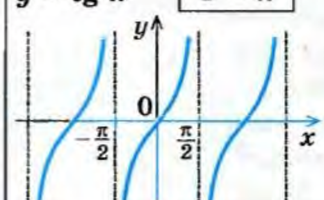
$y = \sin x$ $\boxed{T = 2\pi}$



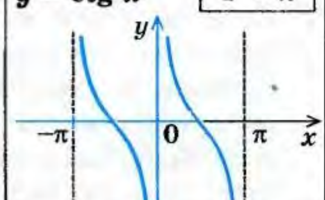
$y = \cos x$ $\boxed{T = 2\pi}$



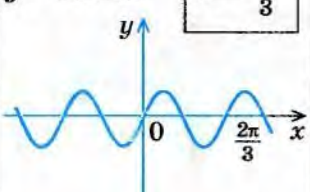
$y = \mathrm{tg}\, x$ $\boxed{T = \pi}$



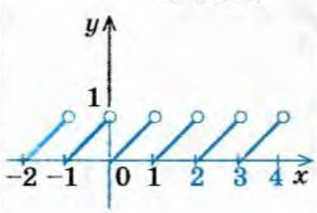
$y = \mathrm{ctg}\, x$ $\boxed{T = \pi}$



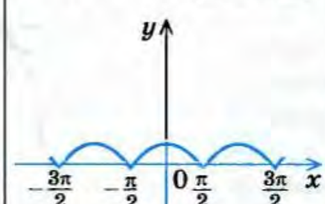
$y = \sin 3x$ $\boxed{T = \frac{2\pi}{3}}$



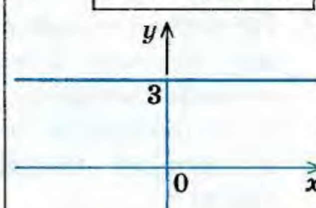
$y = \{x\}$ — дробная часть x



$y = |\cos x|$ $\boxed{T = \pi}$



$y = 3$ $\boxed{T \text{ — любое число } (T \neq 0)}$



Практический прием нахождения периодов функций

1. Найти период каждой составляющей функции, которая входит в запись заданной функции.
2. Подобрать интервал (если это возможно), внутри которого каждый из найденных периодов укладывается целое число раз. Длина этого интервала и будет периодом заданной функции (хотя, возможно, и не наименьшим по абсолютной величине)

Пример 1

$$f(x) = \underbrace{\sin 4x}_{T_1 = \frac{\pi}{2}} + \underbrace{\operatorname{tg} 3x}_{T_2 = \frac{\pi}{3}}.$$

$$\boxed{T_f = \pi} = 2T_1 = 3T_2.$$

Пример 2

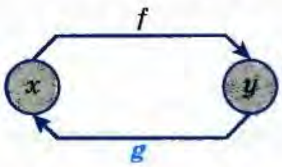
$$g(x) = \underbrace{\sqrt{\cos \frac{3x}{2}}}_{T_1 = \frac{4\pi}{3}} \cdot \underbrace{\lg(\operatorname{ctg} x)}_{T_2 = \pi}.$$

$$\boxed{T_g = 4\pi} = 3T_1 = 4T_2$$

Таблица 30

ОБРАТНАЯ ФУНКЦИЯ

$y = f(x)$



$g(f(x)) = x$
$f(g(y)) = y$

Понятие обратной функции. Пусть функция $f(x)$ принимает каждое свое значение в единственной точке ее области определения (такая функция называется обратимой). Тогда для каждого числа y_0 (из множества значений функции f) существует единственное значение x_0 (из области определения функции f), такое, что $f(x_0) = y_0$. Рассмотрим новую функцию g, которая каждому числу y_0 ставит в соответствие число x_0, т. е. $g(y_0) = x_0$. В этом случае функция g называется ***обратной функции*** f (а функция f — обратной функции g)

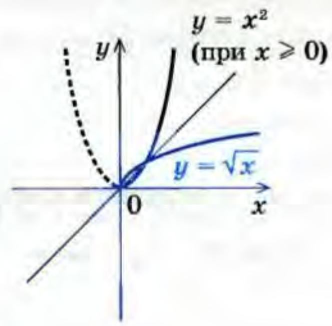
Свойства

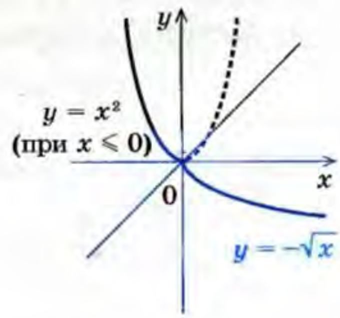
1. Область определения прямой функции является множеством значений обратной, а множество значений прямой функции — областью определения обратной.

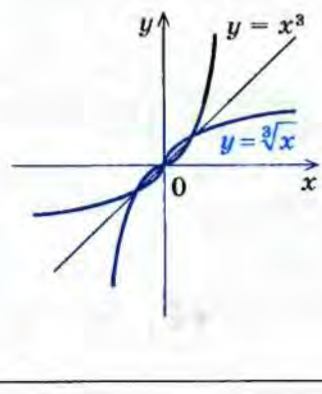
$$\boxed{D_f = E_g} \quad \boxed{E_f = D_g}$$

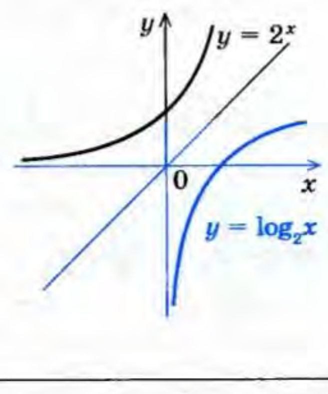
2. Если функция возрастает (убывает) на некотором интервале, то она имеет обратную функцию на этом интервале, которая возрастает, если прямая функция возрастает, и убывает, если прямая функция убывает.
3. ***Графики прямой и обратной функций симметричны относительно прямой*** $y = x$ (биссектрисы первого и третьего координатных углов)

Примеры обратных функций







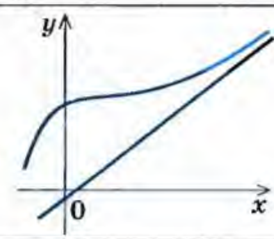


Практический прием нахождения аналитической записи обратной функции для функции $y = f(x)$	
1. Из равенства $y = f(x)$ выразить x через y (на каждом из промежутков, где функция $y = f(x)$ возрастает или убывает). 2. В полученной формуле ввести традиционные обозначения — аргумент обозначить через x, а функцию — через y	**Пример.** Найти обратную функцию для функции $y = x^2 - 2x$. *Решение.* Выясним, на каком промежутке данная функция возрастает, а на каком — убывает. $y' = 2x - 2$. Тогда $y' > 0$ при $x > 1$ — функция возрастает и $y' < 0$ при $x < 1$ — функция убывает. На каждом из этих промежутков: $(-\infty; 1)$ и $(1; +\infty)$ запишем формулу обратной функции. Так как $y = x^2 - 2x$, то $x^2 - 2x - y = 0$. Отсюда $x = 1 \pm \sqrt{1+y}$, т. е. при $x > 1$ $x = 1 + \sqrt{1+y}$, а при $x < 1$ $x = 1 - \sqrt{1+y}$. Меняя обозначения на традиционные, получаем: для функции $y = x^2 - 2x$ при $x > 1$ (и при $x \geqslant 1$) обратной функцией будет функция $y = 1 + \sqrt{1+x}$, а при $x < 1$ (и при $x \leqslant 1$) обратной функцией будет функция $y = 1 - \sqrt{1+x}$

Таблица 31

АСИМПТОТЫ ГРАФИКА ФУНКЦИИ

Определение. ***Асимптота кривой*** — это прямая, к которой неограниченно приближается кривая при удалении ее в бесконечность

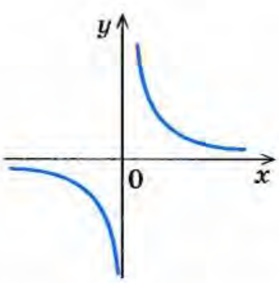
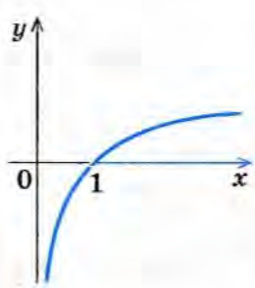
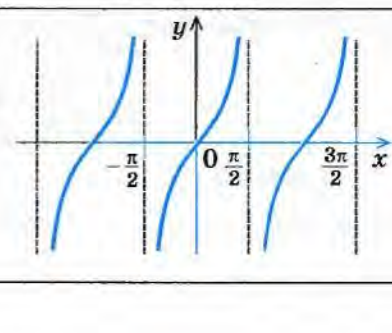


Вертикальные асимптоты ($x = a$)

***$x = a$ — уравнение вертикальной асимптоты* при $x \to a$ функції $f(x) \to \infty$.**

Вертикальная асимптота $x = a$ может быть в точке a, если точка a ограничивает открытые промежутки области определения данной функции и вблизи точки a функция уходит в бесконечность

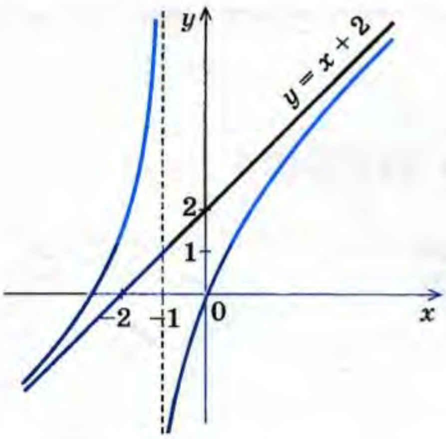
Примеры вертикальных асимптот

$y = \frac{1}{x}$	$y = \ln x$	$y = \mathrm{tg}\, x$
Область определения: $x \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. При $x \to 0$ (справа) $y \to +\infty$. При $x \to 0$ (слева) $y \to -\infty$. Прямая $x = 0$ — вертикальная асимптота	Область определения: $x \in (0; +\infty)$. При $x \to 0$ (справа) $y \to -\infty$. Прямая $x = 0$ — вертикальная асимптота	Область определения: $x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in \mathbf{Z}$. При $x \to \frac{\pi}{2}$ (слева) $y \to +\infty$. При $x \to \frac{\pi}{2}$ (справа) $y \to -\infty$. Прямая $x = \frac{\pi}{2}$ — вертикальная асимптота $\left(x = \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$
		

<table>
<tr><th colspan="2">Наклонные и горизонтальные асимптоты ($y = kx + b$)</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Если $f(x)$ — дробно-рациональная функция, в которой степень числителя на единицу больше степени знаменателя, то, чтобы найти уравнение асимптоты, выделяем целую часть в выражении функции и используем определение асимптоты</td></tr>
<tr><th>Пример 1</th><th>Пример 2</th></tr>
<tr><td>

$$f(x)=\frac{x^2+3x}{x+1}=x+2-\frac{1}{x+1}.$$

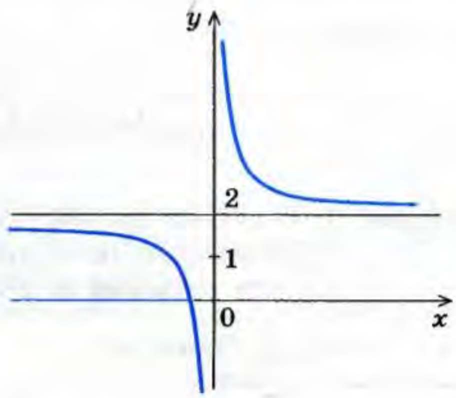
При $x \to \infty$ $\quad \frac{1}{x+1} \to 0$, т. е. $f(x) \to x + 2$. Тогда прямая $y = x + 2$ — наклонная асимптота. (Кроме того, $x = -1$ — вертикальная асимптота — см. график.)



</td><td>

$$f(x)=\frac{2x+1}{x}=2+\frac{1}{x}.$$

При $x \to \infty$ $\quad \frac{1}{x} \to 0$, т. е. $f(x) \to 2$. Тогда прямая $y = 2$ — горизонтальная асимптота. (Кроме того, $x = 0$ — вертикальная асимптота — см. график.)



</td></tr>
<tr><td colspan="2">2. В общем случае уравнения наклонных и горизонтальных асимптот $y = kx + b$ могут быть получены с использованием следующих формул:

$$\boxed{k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}} \qquad \boxed{b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)}$$

</td></tr>
<tr><th>Для примера 1</th><th>Для примера 2</th></tr>
<tr><td>

$$f(x)=\frac{x^2+3x}{x+1}.$$

$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2+3x}{x^2+x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(1+\frac{3}{x}\right)}{x^2\left(1+\frac{1}{x}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(1+\frac{3}{x}\right)}{\left(1+\frac{1}{x}\right)}=\frac{1+0}{1+0}=1.$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3x}{x+1}-x\right)=$$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{x+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{2}{1+\frac{1}{x}}=2.$$

Прямая $y = kx + b = x + 2$ — наклонная асимптота

</td><td>

$$f(x)=\frac{2x+1}{x}.$$

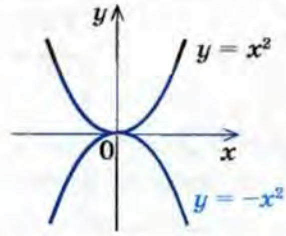
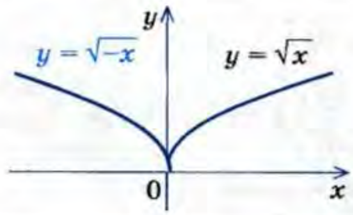
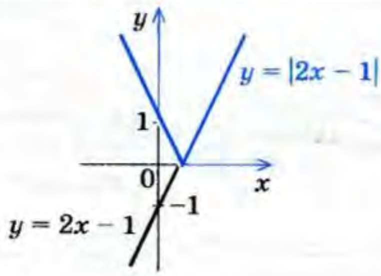
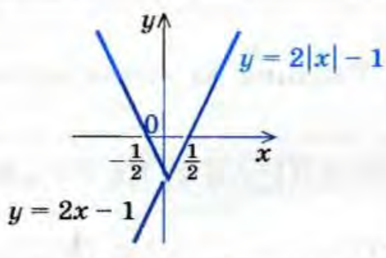
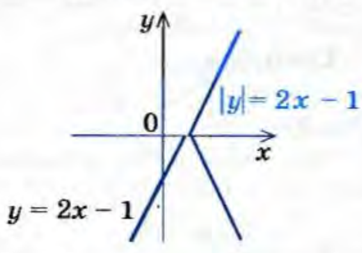
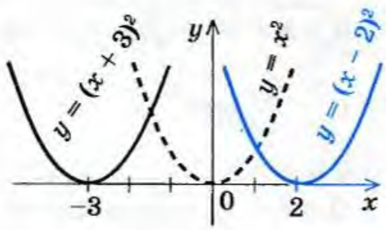
$$k=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x^2}=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}\right)=0.$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-kx)=\lim_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x}=\lim_{x\to\infty}\left(2+\frac{1}{x}\right)=2.$$

Прямая $y = kx + b = 0x + 2 = 2$ — горизонтальная асимптота

</td></tr>
</table>

ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ГРАФИКА ФУНКЦИИ $y = f(x)$

№ п/п	Формула зависимости	Пример	Преобразования
1	$y = -f(x)$		Симметрия графика относительно оси Ox
2	$y = f(-x)$		Симметрия графика относительно оси Oy
3	$y = \vert f(x) \vert$		Выше оси Ox (и на самой оси) график остается без изменения, ниже оси Ox — симметрия относительно оси Ox
4	$y = f(\vert x \vert)$		Правее оси Oy (и на самой оси) график остается без изменения, и эта же часть графика отображается симметрично относительно оси Oy
5	$\vert y \vert = f(x)$		Выше оси Ox (и на самой оси) график остается без изменения, и эта же часть графика отображается симметрично относительно оси Ox
6	$y = f(x - a)$		Параллельный перенос графика вдоль оси Ox на a единиц

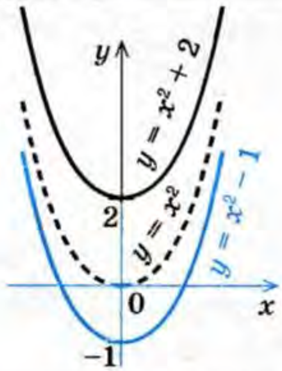
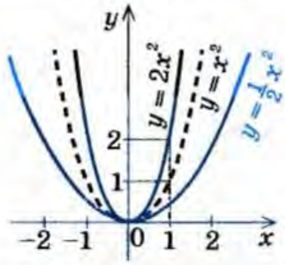
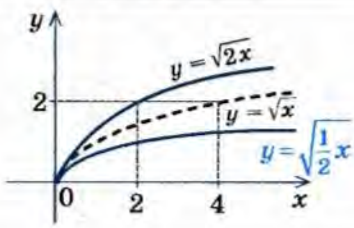
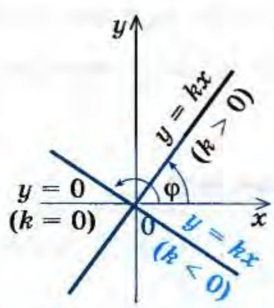
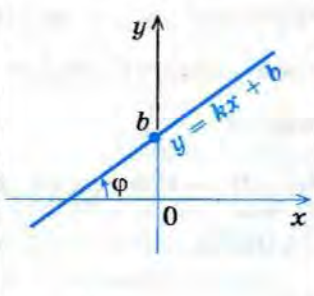
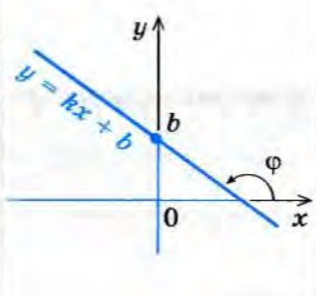
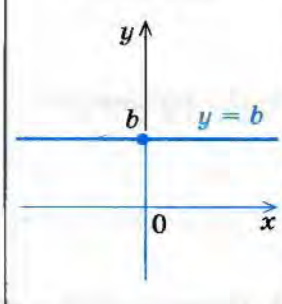
№ п/п	Формула зависимости	Пример	Преобразования
7	$y = f(x) + c$		Параллельный перенос графика вдоль оси Oy на c единиц
8	$y = kf(x)$ $(k > 0)$		График имеет тот же вид, что и график функции $y = f(x)$, только растянут $(k > 1)$ или сжат $(0 < k < 1)$ вдоль оси Oy
9	$y = f(\alpha x)$ $(\alpha > 0)$		График имеет тот же вид, что и график $y = f(x)$, только растянут $(0 < \alpha < 1)$ или сжат $(\alpha > 1)$ вдоль оси Ox

Таблица 33

ЛИНЕЙНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ ГРАФИК	
Определение. ***Линейной функцией*** называют функцию вида $y = kx + b$, где k и b — некоторые числа	
Свойства	
1. *Область определения* (D_y)	$x \in \mathbf{R}$ $(D_y = R)$
2. *Множество значений* (E_y)	1) при $k \neq 0$ $E_y = (-\infty; +\infty)$; 2) при $k = 0$ $y = b$
3. *Четность, нечетность*	1) при $k \neq 0$ и $b \neq 0$ — функция ни четная, ни нечетная; 2) при $k = 0$ — четная; 3) при $b = 0$ и $k \neq 0$ — нечетная; 4) при $b = 0$ и $k = 0$ — функция и четная и нечетная

4. *Точки пересечения с осями координат*	$\boxed{\begin{matrix} Ox \\ y = 0 \end{matrix}}$ 1) при $k \neq 0$, $x = -\frac{b}{k}$ — точка пересечения с осью Ox; 2) $k = 0$, тогда $y = b$ — прямая, паралельная оси Ox при $b \neq 0$ и совпадающая с осью Ox при $b = 0$
	$\boxed{\begin{matrix} Oy \\ x = 0 \end{matrix}}$ $y = b$ — точка пересечения с осью Oy
5. *Непрерывность и дифференцируемость*	Линейная функция непрерывна и дифферецируема на всей числовой прямой. $y' = (kx + b)' = k$
6. *Возрастание и убывание*	1) при $k > 0$ ($y' > 0$) функция **возрастает** на всей числовой прямой; 2) при $k < 0$ ($y' < 0$) функция **убывает** на всей числовой прямой; 3) при $k = 0$ ($y' = 0$) функция **постоянная**
7. ***Графиком линейной функции всегда является прямая,*** *тангенс угла наклона которой к оси Ox равен k (угол отсчитывается от положительного направления оси Ox против часовой стрелки)* $\boxed{k \text{ — угловой коэффициент прямой } y = kx + b}$	1) при $b = 0$ ($y = kx$) — прямая, проходящая через начало координат; 2) при $b \neq 0$ ($y = kx + b$) — прямая, не проходящая через начало координат (получается из прямой $y = kx$ параллельным переносом вдоль оси Oy на b единиц)

Графики линейных функций

$b = 0$ ($y = kx$)	$b \neq 0$ ($y = kx + b$)		
	$k > 0$	$k < 0$	$k = 0$
$\boxed{k = \operatorname{tg} \varphi}$	$\boxed{k = \operatorname{tg} \varphi}$	$\boxed{k = \operatorname{tg} \varphi}$	$\boxed{k = \operatorname{tg} 0}$
			

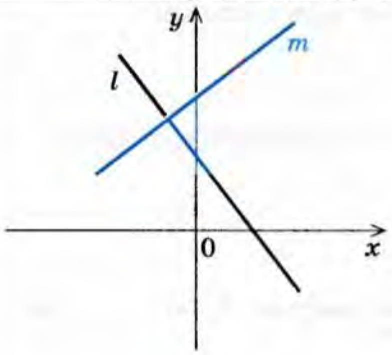
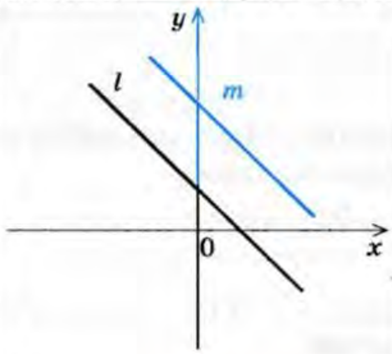
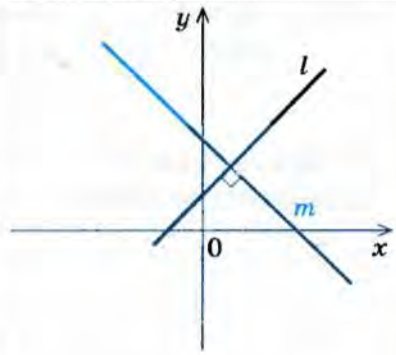
Взаимное расположение графиков линейных функций		
Условие пересечения прямых	**Условие параллельности прямых**	**Условие перпендикулярности прямых**
$y = k_1x + b_1$ — прямая l; $y = k_1x + b_1$ — прямая m		
		
Если $k_1 \neq k_2$, то прямые l и m пересекаются в одной точке	$l \parallel m \Leftrightarrow \begin{cases} k_1 = k_2 \\ b_1 \neq b_2 \end{cases}$	$l \perp m \Leftrightarrow k_1 \cdot k_2 = -1$

Таблица 34

ФУНКЦИЯ $y = \dfrac{k}{x}$ $(k \neq 0)$ И ЕЕ ГРАФИК	
Свойства	
1. *Область определения*	$x \neq 0$ $(D_y = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty))$
2. *Множество значений*	$y \neq 0$ $(E_y = (-\infty; 0) \cup (0; +\infty))$
3. *Четность, нечетность*	Функция нечетная $\left(f(-x) = \dfrac{k}{-x} = -\dfrac{k}{x} = -f(x)\right)$, ее график симметричен относительно начала координат
4. *Точки пересечения с осями координат*	Поскольку $x \neq 0$ и $y \neq 0$, то точек пересечения с осями координат нет
5. *Непрерывность и дифференцируемость*	Функция $y = \dfrac{k}{x}$ непрерывна в каждой точке своей области определения и имеет производную $y' = -\dfrac{k}{x^2}$ ($y' \neq 0$ — критических точек нет)
6. *Возрастание и убывание*	1) При $k > 0$ $(y' < 0)$ функция **убывает на каждом интервале** $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$; 2) при $k < 0$ $(y' > 0)$ функция **возрастает на каждом интервале** $(-\infty; 0)$ и $(0; +\infty)$

7. *Асимптоты* (см. табл. 31)	1) При $x \to \infty$ $y = \frac{k}{x} \to 0$, т. е. прямая $y = 0$ — горизонтальная асимптота; 2) при $x \to 0$ справа $y = \frac{k}{x} \to \begin{pmatrix} +\infty \text{ при } k > 0 \\ -\infty \text{ при } k < 0 \end{pmatrix}$; при $x \to 0$ слева $y = \frac{k}{x} \to \begin{pmatrix} -\infty \text{ при } k > 0 \\ +\infty \text{ при } k < 0 \end{pmatrix}$, т. е. $x = 0$ — вертикальная асимптота

8. ***График функции*** $y = \frac{k}{x}$ *— кривая, состоящая из двух ветвей (симметричная относительно начала координат), которую* ***называют гиперболой*** *(при $k > 0$ ветви гиперболы расположены в I и III координатных четвертях, при $k < 0$ — во II и IV координатных четвертях)*

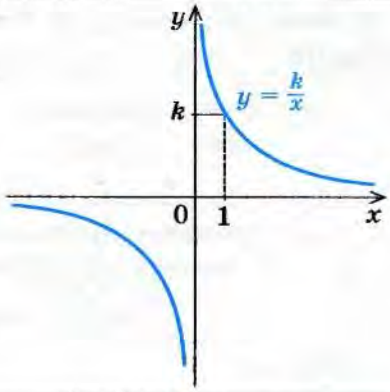
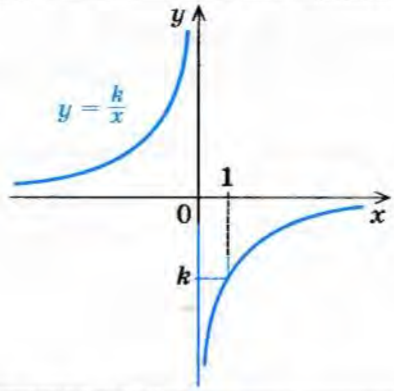
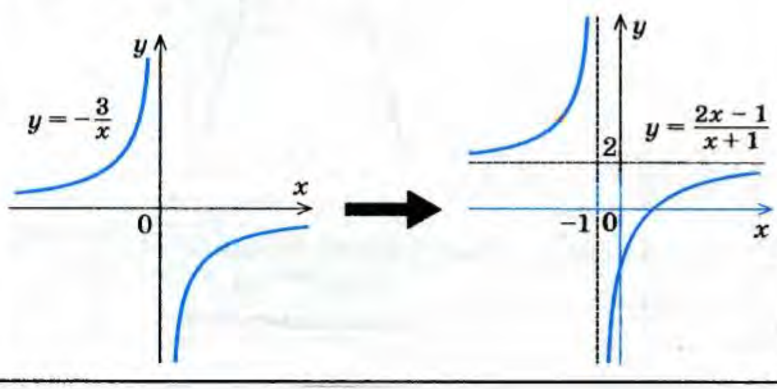
$k > 0$	$k < 0$
	

График дробно-линейной функции $\left(y = \frac{ax+b}{cx+d}, \text{ где } c \neq 0\right)$

Пример	Способ построения
Построить график функции $y = \frac{2x-1}{x+1}$. *Решение.* $y = \frac{2x-1}{x+1} = \frac{2(x+1)-3}{x+1} = 2 - \frac{3}{x+1}$, т. е. график данной функции получается **параллельным переносом** графика функции $y = -\frac{3}{x}$ **вдоль оси** Ox на (-1) единицу и вдоль оси Oy на $(+2)$ единицы 	***Выделить целую часть*** (*т. е. записать в виде* $y = m + \frac{k}{x-n}$) ***и выполнить параллельный перенос графика*** $y = \frac{k}{x}$ (*вдоль оси Ox на n единиц и вдоль оси Oy на m единиц* — см. табл. 32)

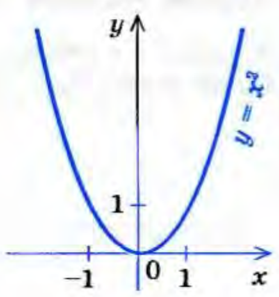
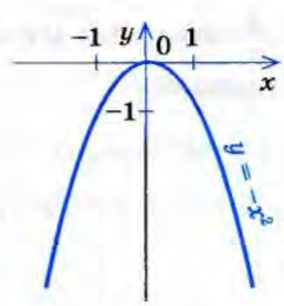
КВАДРАТИЧНАЯ ФУНКЦИЯ И ЕЕ ГРАФИК

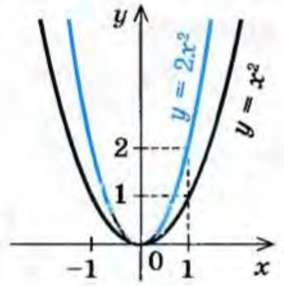
Определение. ***Квадратичной функцией*** называют функцию вида $y = ax^2 + bx + c$, где $a \neq 0$

Свойства

Графиком квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) всегда является парабола, ветви которой направлены вверх при $a > 0$ и вниз при $a < 0$	**Координаты вершины параболы:** $x_0 = -\frac{b}{2a}$; $y_0 = y(x_0) = -\frac{D}{4a}$, где $D = b^2 - 4ac$. **Ось симметрии параболы** $x = x_0$
1. *Область определения* (D_y)	$x \in R$ ($D_y = R$)
2. *Множество значений* (E_y)	При $a > 0$ $E_y = [y_0; +\infty)$; при $a < 0$ $E_y = (-\infty; y_0]$
3. *Четность, нечетность*	При $b \neq 0$ — функция ни четная, ни нечетная; при $b = 0$ функция $y = ax^2 + c$ — четная
4. *Непрерывность и дифференцируемость*	Квадратичная функция непрерывна и дифференцируема на всей числовой прямой $y' = 2ax + b$
5. *Возрастание и убывание, экстремумы*	При $a > 0$ функция убывает на промежутке $(-\infty; x_0]$ ($y' < 0$) и возрастает на промежутке $[x_0; +\infty)$ ($y' > 0$), $x_0 = -\frac{b}{2a}$ — точка минимума, $y_0 = y(x_0)$ — минимум. При $a < 0$ функция возрастает на промежутке $(-\infty; x_0]$ ($y' > 0$) и убывает на промежутке $[x_0; +\infty)$ ($y' < 0$), $x_0 = -\frac{b}{2a}$ — точка максимума, $y_0 = y(x_0)$ — максимум

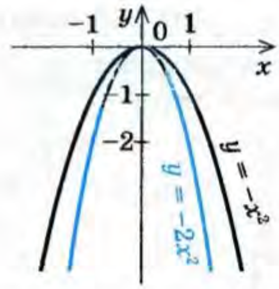
Расположение некоторых графиков квадратичных функций

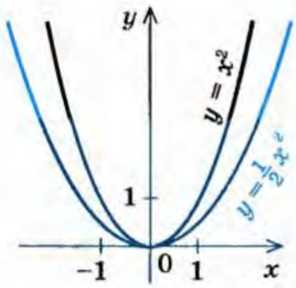
$a > 0$	$a < 0$
$\boxed{y = x^2}$  Наименьшее значение — 0 (при $x = 0$), наибольшего нет	$\boxed{y = -x^2}$  Наибольшее значение — 0 (при $x = 0$), наименьшего нет



$y = ax^2$

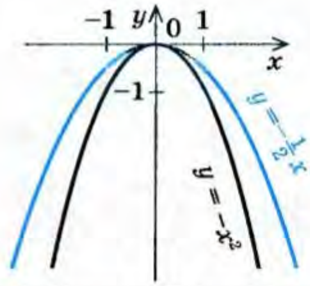
$|a| > 1$



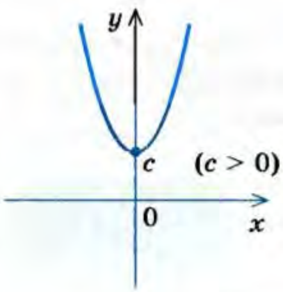


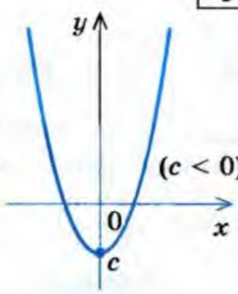
$y = ax^2$

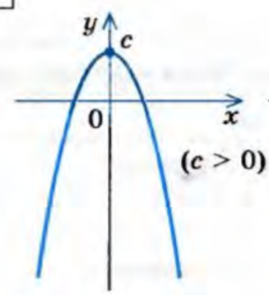
$0 < |a| < 1$

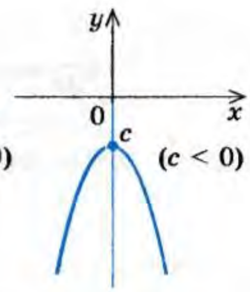


$y = ax^2 + c$



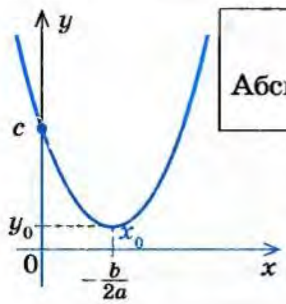






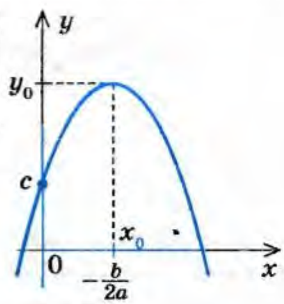
Наименьшее значение равно c (при $x = 0$), наибольшего нет

Наибольшее значение равно c (при $x = 0$), наименьшего нет



$y = ax^2 + bx + c$

Абсцисса вершины — $x_0 = -\frac{b}{2a}$



Наименьшее значение y_0 функция принимает в точке x_0, наибольшего значения нет

$y_0 = y(x_0) = -\frac{D}{4a}$,

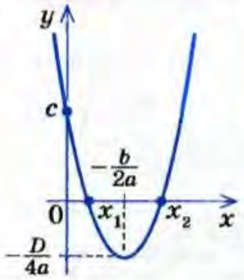
где $D = b^2 - 4ac$

Наибольшее значение y_0 функция принимает в точке x_0, наименьшего значения нет

Парабола пересекает ось Oy в точке c

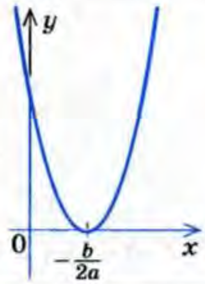
<table>
<tr><th colspan="3">Различные случаи расположения графика функции $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ относительно оси Ox ($D = b^2 - 4ac$ — дискриминант)</th></tr>
<tr><th>При $D > 0$ график пересекает ось Ox в двух точках</th><th>При $D = 0$ график касается оси Ox</th><th>При $D < 0$ график не пересекает ось Ox</th></tr>
<tr>
<td>

$a > 0$
$D > 0$



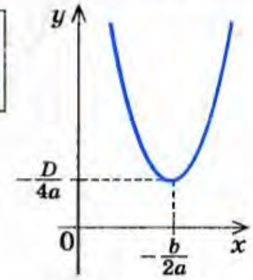
</td>
<td>

$a > 0$
$D = 0$



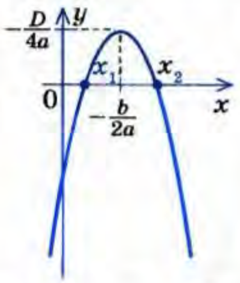
</td>
<td>

$a > 0$
$D < 0$



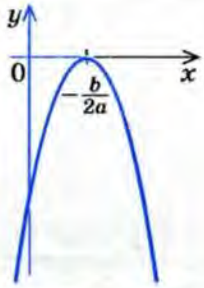
</td>
</tr>
<tr>
<td>

$a < 0$
$D > 0$



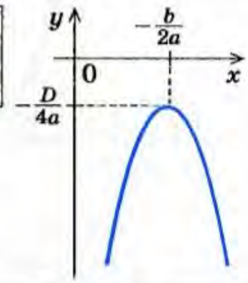
</td>
<td>

$a < 0$
$D = 0$



</td>
<td>

$a < 0$
$D < 0$



</td>
</tr>
</table>

Построение эскиза графика функции $y = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$

<table>
<tr><th>I способ</th><th>II способ</th></tr>
<tr>
<td>

1. Вычислить абсциссу вершины
$$x_0 = -\frac{b}{2a}.$$
2. Подставить $x = x_0$ в уравнение и вычислить ординату вершины y_0.
3. Построить эскиз параболы (вида $y = ax^2$) с вершиной в точке $(x_0;\ y_0)$:
при $a > 0$ — ветви направлены вверх,
при $a < 0$ — ветви направлены вниз

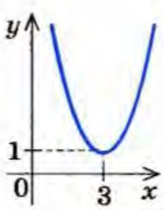
</td>
<td>

1. Выделить полный квадрат
$$ax^2 + bx + x = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left(x^2 + 2\frac{b}{2a}x + \left(\frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{c}{a}\right) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a} = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{D}{4a}.$$
2. Используя элементарные преобразования графиков (табл. 32), **выполнить параллельный перенос параболы ax^2** (вдоль оси Ox на $-\frac{b}{2a}$, вдоль оси Oy на $-\frac{D}{4a}$)

</td>
</tr>
<tr><th colspan="2">Пример. Построить график функции $y = 2x^2 - 12x + 19$</th></tr>
<tr>
<td>

Решение

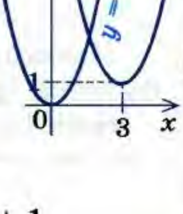
1. $x_0 = -\frac{b}{2a} = 3.$
2. $y_0 = y(x_0) = y(3) = 1.$
3. Строим параболу вида $y = 2x^2$ (ветви направлены вверх, так как $a = 2 > 0$) с вершиной в точке $(3;\ 1)$ (пересечение с осью Oy в точке $c = 19$)



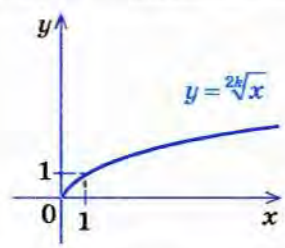
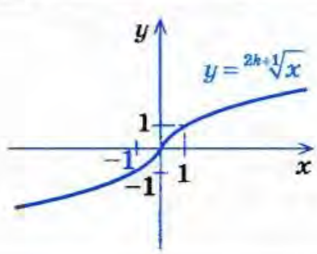
</td>
<td>

Решение

1. $y = 2x^2 - 12x + 19 = 2\left(x^2 - 6x + \frac{19}{2}\right) =$
$= 2\left(x^2 - 6x + 9 - 9 + \frac{19}{2}\right) = 2(x-3)^2 + 1.$
2. График данной функции получается из графика функции $y = 2x^2$ (парабола, ветви направлены вверх, вершина — в точке $(0;\ 0)$ — см. выше) параллельным переносом вдоль оси Ox на $(+3)$ единицы и вдоль оси Oy на $(+1)$ единицу.
$y = 2x^2 - 12x + 19 = 2(x-3)^2 + 1$

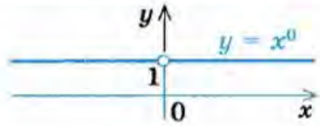


</td>
</tr>
</table>

<table>
<tr><th colspan="3">ФУНКЦИЯ $y=\sqrt[n]{x}$ $(n \geqslant 2,\ n \in N)$ И ЕЕ ГРАФИК</th></tr>
<tr><th colspan="3">Свойства</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$f(x)=\sqrt[n]{x}$</td><td>n — четное $(n=2k,\ k \in N)$</td><td>n — нечетное $(n=2k+1,\ k \in N)$</td></tr>
<tr><td>$y=\sqrt[n]{x}=\sqrt[2k]{x}$</td><td>$y=\sqrt[n]{x}=\sqrt[2k+1]{x}$</td></tr>
<tr><td>1. Область определения</td><td>$x \geqslant 0$ $(D_y=[0;\ +\infty))$</td><td>$x \in \boldsymbol{R}$ $(D_y=\boldsymbol{R})$</td></tr>
<tr><td>2. Множество значений</td><td>$y \geqslant 0$ $(E_y=[0;\ +\infty))$</td><td>$y \in \boldsymbol{R}$ $(E_y=\boldsymbol{R})$</td></tr>
<tr><td>3. Четность, нечетность</td><td>Ни четная, ни нечетная</td><td>Функция нечетная:
$f(-x)=\sqrt[2k+1]{-x}=-\sqrt[2k+1]{x}=-f(x)$,
и ее график симметричен относительно начала координат</td></tr>
<tr><td>4. Точки пересечения с осями координат</td><td colspan="2">Если $y=0$, то $\sqrt[n]{x}=0$, т. е. $x=0$, следовательно,
график проходит через начало координат</td></tr>
<tr><td>5. Непрерывность и дифференцируемость</td><td colspan="2">Функция $y=\sqrt[n]{x}$ непрерывна в каждой точке своей области определения и при $x \neq 0$ имеет производную $y'=\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$</td></tr>
<tr><td rowspan="3">6. Возрастание и убывание</td><td><table><tr><td>x</td><td>0</td><td>$(0;\ +\infty)$</td></tr><tr><td>y'</td><td>Не существует</td><td>+</td></tr><tr><td>y</td><td>0</td><td>↗*</td></tr></table></td><td><table><tr><td>x</td><td>$(-\infty;\ 0)$</td><td>0</td><td>$(0;\ +\infty)$</td></tr><tr><td>y'</td><td>+</td><td>Не существует</td><td>+</td></tr><tr><td>y</td><td>↗</td><td>0</td><td>↗</td></tr></table></td></tr>
<tr><td colspan="2">Учитывая непрерывность функции, получаем, что функция $y=\sqrt[n]{x}$ возрастает на всей области определения</td></tr>
<tr><td>(при $x \in [0;\ +\infty)$)</td><td>(при $x \in \boldsymbol{R}$)</td></tr>
<tr><td>7. Взаимно обратные функции</td><td>$y=x^{2k}$ (при $x \geqslant 0$) и $y=\sqrt[2k]{x}$</td><td>$y=x^{2k+1}$ (при $x \in \boldsymbol{R}$) и $y=\sqrt[2k+1]{x}$</td></tr>
<tr><td colspan="3">Графики симметричны относительно прямой $y=x$ (см. табл. 30)</td></tr>
<tr><td>8. График функции $y=\sqrt[n]{x}$</td><td>
</td><td>
</td></tr>
</table>

* Стрелкой ↗ обозначено, что функция возрастает, а стрелкой ↘ — функция убывает.

СТЕПЕННАЯ ФУНКЦИЯ

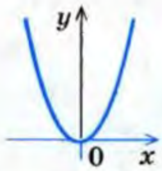
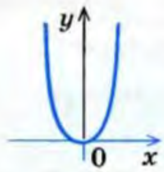
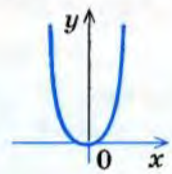
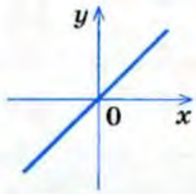
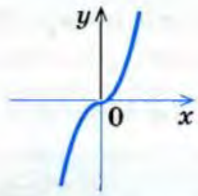
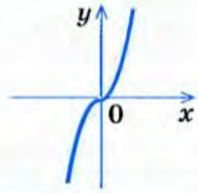
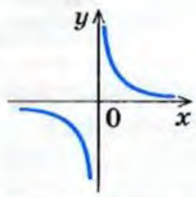
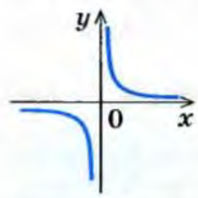
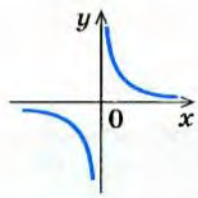
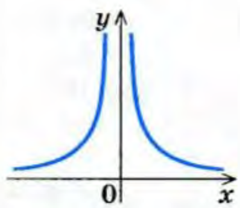
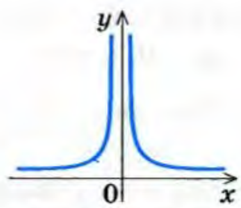
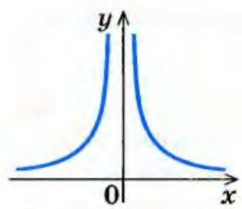
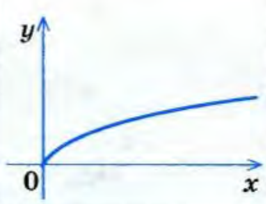
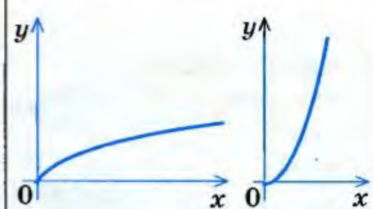
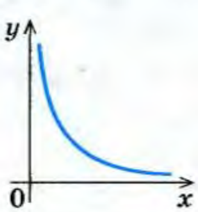
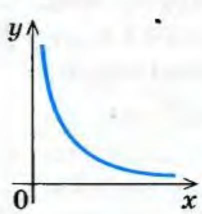
Определение	Особый случай ($\alpha = 0$)
Функцию вида $y = x^\alpha$, где α — любое действительное число, называют *степенной функцией*	Если $\alpha = 0$, то $y = x^\alpha = x^0 = 1$ $(x \neq 0)$ 

Свойства функции $y = x^\alpha$ (при $\alpha \neq 0$)

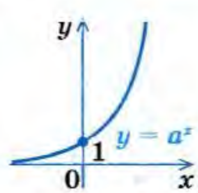
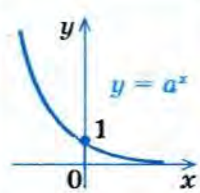
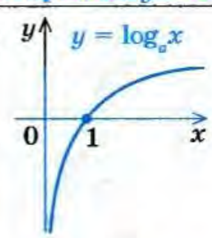
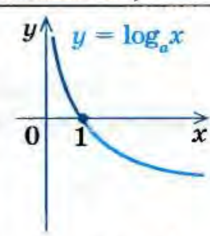
$f(x) = x^\alpha$	α — натуральное		α — целое отрицательное		α — нецелое	
	четное	нечетное	четное	нечетное	$\alpha > 0$	$\alpha < 0$
1. *Область определения —* D_f	R		$x \neq 0$		$x \geqslant 0$ $[0; +\infty)$	$x > 0$ $(0; +\infty)$
2. *Множество значений —* E_f	$[0; +\infty)$	R	$(0; +\infty)$	$(-\infty; 0) \cup$ $\cup\ (0; +\infty)$	$[0; +\infty)$	$(0; +\infty)$
3. *Четность, нечетность*	Четная	Нечетная	Четная	Нечетная	Ни четная, ни нечетная	
4. *Периодичность*	Функция непериодическая					
5. *Пересечение с осями координат*	$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0 \end{cases}$		Нет		$\begin{cases} x = 0, \\ y = 0 \end{cases}$	Нет
6. *Производная*	$(x^\alpha)' = \alpha x^{\alpha - 1}$					
7. *Возрастание и убывание*	$(-\infty; 0)$ — убывает, $(0; +\infty)$ — возрастает	Возрастает	$(-\infty; 0)$ — возрастает, $(0; +\infty)$ — убывает	$(-\infty; 0)$ — убывает, $(0; +\infty)$ — убывает	Возрастает	Убывает
8. *Экстремумы*	$\begin{cases} x_{\min} = 0, \\ y_{\min} = 0 \end{cases}$	Нет			$\min\limits_{[0; +\infty)} f(x) = f(0) = 0$	Нет
9. *Асимптоты*	Нет		$x = 0$ и $y = 0$		Нет	$x = 0$ и $y = 0$
10. *Выпуклость и точки перегиба*	$\cup$*	При $\alpha \neq 1$ $(-\infty; 0) \cap$, $(0; +\infty) \cup$, 0 — точка перегиба	$(-\infty; 0) \cup$, $(0; +\infty) \cup$	$(-\infty; 0) \cap$, $(0; +\infty) \cup$	$0 < \alpha < 1\ \cap$, $\alpha > 1\ \cup$	$\cup$

* $\cup$ — выпуклость вниз, $\cap$ — выпуклость вверх.

Графики степенной функции ($y = x^{\alpha}$)

α — четное натуральное число	$y = x^2$ 	$y = x^4$ 	$y = x^{2n}$, $n \in N$ 
α — нечетное натуральное число	$y = x^1$ 	$y = x^3$ 	$y = x^{2n+1}$, $n \in N$ 
α — нечетное отрицательное число	$y = x^{-1} = \frac{1}{x}$ 	$y = x^{-3} = \frac{1}{x^3}$ 	$y = x^{-(2n-1)} = \frac{1}{x^{2n-1}}$, $n \in N$ 
α — четное отрицательное число	$y = x^{-2} = \frac{1}{x^2}$ 	$y = x^{-4} = \frac{1}{x^4}$ 	$y = x^{-2n} = \frac{1}{x^{2n}}$, $n \in N$ 
α — нецелое положительное число	$y = x^{\frac{1}{2}}$ 	$y = x^{\frac{3}{2}}$ 	$y = x^{\alpha}$ ($\alpha > 0$, α — нецелое) 
α — нецелое отрицательное число	$y = x^{-\frac{1}{2}}$ 	$y = x^{-\frac{3}{2}}$ 	$y = x^{\alpha}$ ($\alpha < 0$, α — нецелое) 

ПОКАЗАТЕЛЬНАЯ И ЛОГАРИФМИЧЕСКАЯ ФУНКЦИИ И ИХ ГРАФИКИ

	Показательная функция		Логарифмическая функция	
	Определение. ***Показательной функцией*** называют функцию вида $y = a^x$, где $a > 0$, $a \neq 1$		**Определение.** ***Логарифмической функцией*** называют функцию вида $y = \log_a x$, где $a > 0$, $a \neq 1$	
Свойства				
1. *Область определения* D_f	$x \in R$ $(D(a^x) = R)$		$x > 0$ $(D(\log_a x) = (0; +\infty))$	
2. *Множество значений* E_f	$y > 0$ $(E(a^x) = (0; +\infty))$		$y \in R$ $(E(\log_a x) = R)$	
3. *Четность, нечетность*	Функция ни четная, ни нечетная			
4. *Пересечение с осями координат*	Пересечения с осью $\boxed{Ox}$ нет ($a^x \neq 0$ при $a > 0$, $a \neq 1$), $\boxed{Oy}$ $x = 0$, $y = a^0 = 1$		$\boxed{Ox}$ $(y = 0)$ $\log_a x = 0$ при $x = a^0 = 1$. Пересечения с осью $\boxed{Oy}$ нет ($x \neq 0$ по области определения)	
5. *Непрерывность и производная*	Функция непрерывна и дифференцируема на всей области определения			
	$(a^x)' = a^x \ln a$		$(\log_a x)' = \dfrac{1}{x \ln a}$	
6. *Промежутки знакопостоянства*	$a > 1$	$0 < a < 1$	$a > 1$	$0 < a < 1$
	Для всех $x \in R$ $y = a^x > 0$ $(a > 0, a \neq 1)$		$y = \log_a x > 0$ при $x > 1$, $y = \log_a x < 0$ при $0 < x < 1$	$y = \log_a x > 0$ при $0 < x < 1$, $y = \log_a x < 0$ при $x > 1$
7. *Возрастание и убывание* (экстремумов нет)	Возрастает	Убывает	Возрастает	Убывает
8. *Асимптоты* (см. табл. 31)	При $x \to -\infty$ $y = a^x \to 0$,	При $x \to +\infty$ $y = a^x \to 0$,	При $x \to 0$ (справа) $y = \log_a x \to -\infty$,	$y = \log_a x \to +\infty$,
	т. е. прямая $y = 0$ — горизонтальная асимптота		т. е. прямая $x = 0$ — вертикальная асимптота	
	При $x \to +\infty$ $y = a^x \to +\infty$	При $x \to -\infty$ $y = a^x \to +\infty$	При $x \to +\infty$ $y = \log_a x \to +\infty$	При $x \to +\infty$ $y = \log_a x \to -\infty$
Функции $y = a^x$ и $y = \log_a x$ $(a > 0, a \neq 1)$ — взаимно обратные функции, поэтому их графики симметричны относительно прямой $y = x$ (см. табл. 30)				
9. *Графики показательных и логарифмических функций*	 $a > 1$	 $0 < a < 1$	 $a > 1$	 $0 < a < 1$

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ОДНОЙ ПЕРЕМЕННОЙ

Уравнения

Определение. Равенство с переменной называют ***уравнением.***

В общем виде под уравнением понимают аналитическую запись задачи о нахождении значений аргументов, при которых значения двух данных функций равны.

Поэтому уравнение с одной переменной x в общем виде обычно записывают в виде:

$$f(x) = g(x)$$

Корнем (или *решением*) ***уравнения*** называют значение переменной, при котором уравнение обращается в верное числовое равенство.

Неравенства с переменной

Понятие неравенства с переменной. Если два выражения с переменной соединить одним из знаков: $>$ (больше) $<$ (меньше), $\geqslant$ (больше или равно) $\leqslant$ (меньше или равно), то получим неравенство с переменной.

В общем виде неравенство с одной переменной x (например, для случая «больше») обычно записывают в виде:

$$f(x) > g(x)$$

Решением **неравенства** называют значение переменной, при котором неравенство обращается в верное числовое неравенство.

Решить уравнение (неравенство) *— значит найти все его корни (решения) или показать, что их нет*

Область допустимых значений (ОДЗ)

Определение. ***Областью допустимых значений*** (или ***областью определения***) уравнения или неравенства называют общую область определения для функций $f(x)$ и $g(x)$, стоящих в левой и правой частях уравнения или неравенства

Пример 1

Для уравнения (или неравенства) $\sqrt{x+1} \gtreqless x$

ОДЗ: $x + 1 \geqslant 0$, т. е. $x \geqslant -1$

(можно также записать: ОДЗ: $[-1; +\infty)$, так как область определения функции $f(x) = \sqrt{x+1}$ определяется условием $x + 1 \geqslant 0$, а область определения функции $g(x) = x$ — множество всех действительных чисел)

Пример 2

Для уравнения (или неравенства)

$$\frac{1}{x-2} \gtreqless \frac{x}{x-1}$$

ОДЗ: $\begin{cases} x-2 \neq 0, \\ x-1 \neq 0 \end{cases}$ т. е. $\begin{cases} x \neq 2, \\ x \neq 1, \end{cases}$

что можно записать и так:

ОДЗ: $(-\infty; 1) \cup (1; 2) \cup (2; +\infty)$

Уравнения (неравенства)–следствия ($\Rightarrow$)

Если каждый корень первого уравнения является корнем второго уравнения, то второе уравнение называют следствием первого. При использовании уравнений-следствий возможно появление посторонних корней. Поэтому **проверка полученных корней подстановкой в исходное уравнение является составной частью решения** (см. также табл. 40)

При решении неравенств следствия не используются (а используются равносильные преобразования), так как обычно невозможно выполнить проверку всех полученных решений неравенства-следствия (см. также табл. 40)

Равносильные уравнения и неравенства ($\Leftrightarrow$)

Определение. Два уравнения (неравенства) называют ***равносильными*** (или *эквивалентными*) ***на некотором множестве*** (обычно на ОДЗ исходного уравнения или неравенства), если на этом множестве они имеют одни и те же решения, т. е. каждое решение первого уравнения (неравенства) является решением второго и, наоборот, каждое решение второго уравнения (неравенства) является решением первого (см. также табл. 40)

<table>
<tr><th colspan="2">Некоторые теоремы о равносильности</th></tr>
<tr><th>Уравнения</th><th>Неравенства</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Если из одной части уравнения (или неравенства) перенести в другую часть слагаемые с противоположным знаком, то получим уравнение (или неравенство), равносильное данному (на любом множестве)</td></tr>
<tr><td>2. Если обе части уравнения умножить или разделить на одно и то же число, не равное нулю (или на одну и ту же функцию, имеющую смысл и не равную нулю на ОДЗ исходного уравнения), то получим уравнение, равносильное исходному (на ОДЗ исходного)</td><td>2а. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же положительное число (или на одну и ту же функцию, имеющую смысл и положительную на ОДЗ исходного неравенства), то получим неравенство, равносильное исходному (на ОДЗ исходного).
2б. Если обе части неравенства умножить или разделить на одно и то же отрицательное число (или на одну и ту же функцию, имеющую смысл и отрицательную на ОДЗ исходного неравенства) и, кроме того, поменять знак неравенства на противоположный, то получим неравенство, равносильное исходному (на ОДЗ исходного)</td></tr>
<tr><td>3. Если от обеих частей уравнения
$f(x) = g(x)$
взять возрастающую (или убывающую) функцию $\varphi(u)$ и при этом не происходит сужения ОДЗ исходного уравнения, то полученное уравнение
$\varphi(f(x)) = \varphi(g(x))$
будет равносильно исходному (на ОДЗ исходного)</td><td>3а. Если от обеих частей неравенства $f(x) > g(x)$ взять возрастающую функцию $\varphi(u)$ (сохранив знак неравенства) и при этом не происходит сужения ОДЗ исходного неравенства, то полученное неравенство $\varphi(f(x)) > \varphi(g(x))$ будет равносильно исходному (на ОДЗ исходного).
3б. Если от обеих частей неравенства $f(x) > g(x)$ взять убывающую функцию $\varphi(u)$, поменяв знак неравенства на противоположный, и при этом не происходит сужения ОДЗ исходного неравенства, то полученное неравенство $\varphi(f(x)) < \varphi(g(x))$ будет равносильно исходному (на ОДЗ исходного)</td></tr>
<tr><th colspan="2">Следствия</th></tr>
<tr><td colspan="2">1. Так как функция $\varphi(u) = u^{2k+1}$ $(k \in N)$ монотонно возрастает, то</td></tr>
<tr><td>$\boxed{f(x) = g(x) \Leftrightarrow f^{2k+1}(x) = g^{2k+1}(x)}$</td><td>$\boxed{f(x) > g(x) \Leftrightarrow f^{2k+1}(x) > g^{2k+1}(x)}$</td></tr>
<tr><td colspan="2">При возведении обеих частей уравнения (неравенства) в нечетную натуральную степень (с сохранением знака неравенства) получается уравнение (неравенство), равносильное данному (на ОДЗ исходного)</td></tr>
<tr><td>2. Поскольку функция $\varphi(u) = u^{2k}$ $(k \in N)$ монотонно возрастает только при $u \geqslant 0$, то в случае, когда обе части уравнения (неравенства) неотрицательные, при возведении обеих его частей в четную натуральную степень получаем уравнение (неравенство), равносильное данному (на ОДЗ исходного)</td><td>Пример. $|x+3| > |x-1| \Leftrightarrow$
(обе части неотрицательные!)
$\Leftrightarrow (|x+3|)^2 > (|x-1|)^2 \Leftrightarrow$
$x^2 + 6x + 9 > x^2 - 2x + 1 \Leftrightarrow$
$8x > -8 \Leftrightarrow x > 1$

(Но $\sqrt{x+1} > x \cancel{\Leftrightarrow} x+1 > x^2$ — см. табл. 53)</td></tr>
</table>

Таблица 40

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Решение уравнений

Следствия ($\Rightarrow$)

Решение

I. ① → ② Преобразования, гарантирующие сохранение верного равенства

II. Проверка (подстановкой в исходное уравнение)

Равносильные преобразования ($\Leftrightarrow$)

Решение

I. Учесть ОДЗ исходного

II. ① ⇄ ② Гарантия сохранения на ОДЗ верного равенства (или неравенства) при прямых и обратных преобразованиях на каждом шаге решения

Использование свойств соответствующих функций (см. табл. 43)

1. Конечная ОДЗ.
2. Оценка левой и правой частей.
3. Использование монотонности функции.
4. «Ищи квадратный трехчлен» и др.

Решение неравенств

Метод интервалов

Для неравенств вида $\boxed{f(x) \geqslant 0}$, где $f(x)$ — функция, непрерывная в каждой точке своей области определения

Решение

1. Найти ОДЗ.
2. Найти нули функции $\boxed{f(x) = 0}$.
3. Отметить нули функции на ОДЗ и найти знак функции в каждом интервале, на которые разбивается ОДЗ.
4. Записать ответ, учитывая знак неравенства

Таблица 41

СХЕМА ВЫПОЛНЕНИЯ РАВНОСИЛЬНЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Данное уравнение или неравенство $\Leftrightarrow$
- I. Учесть ОДЗ исходного
- II. Гарантировать (на ОДЗ) прямые и обратные преобразования ① ⇄ ② (с сохранением верного равенства или неравенства)

Таблица 42

КАК НЕ ПОТЕРЯТЬ КОРНИ УРАВНЕНИЯ ПРИ СУЖЕНИИ ОДЗ

(суженная часть ОДЗ представлена на голубом фоне)

I способ		II способ		III способ	
ОДЗ		ОДЗ		ОДЗ	
I	II	I	II	I	II
1. Проверяем, не являются ли точки, которые находятся в этой части ОДЗ, корнями уравнения	2. Находим решение в этой части ОДЗ корни	1. Доказать, что в этой части ОДЗ корней нет	2. Найти решение в этой части ОДЗ корни		1. Доказать, что все корни находятся в этой части ОДЗ 2. Найти решения в этой части ОДЗ корни

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ СВОЙСТВ ФУНКЦИЙ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ

1. Конечная ОДЗ

Если область допустимых значений (ОДЗ) уравнения (неравенства или системы) состоит из конечного числа значений, то для решения достаточно проверить все эти значения

Пример. $\sqrt{x^2-1}+x=1+\sqrt{2-2x^2}$.

Решение. ОДЗ: $\begin{cases} x^2-1\geqslant 0, \\ 2-2x^2\geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2\geqslant 1, \\ x^2\leqslant 1 \end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow x^2=1 \Leftrightarrow x=\pm 1.$

Проверка: $x=1$ — корень $\left(\sqrt{0}+1=1+\sqrt{0};\ 1=1\right)$, $x=-1$ — не корень $\left(\sqrt{0}-1\neq 1+\sqrt{0}\right)$.

Ответ: $x=1$

2. Оценка левой и правой частей уравнения

$\boxed{\begin{array}{l} f(x)=g(x) \\ \hline f(x)\geqslant a \\ g(x)\leqslant a \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} f(x)=a \\ g(x)=a \end{cases}}$

Пример. $x^2+2^{|x|}=1$.

Решение. $x^2+2^{|x|}=1 \Leftrightarrow 2^{|x|}=1-x^2 \Leftrightarrow$

$f(x)=2^{|x|}\geqslant 1$ (так как $|x|\geqslant 0$), $g(x)=1-x^2\leqslant 1$ $\Leftrightarrow \begin{cases} 2^{|x|}=1, \\ 1-x^2=1 \end{cases} \Leftrightarrow x=0$

Ответ: 0

$\boxed{\begin{array}{l} f_1(x)+f_2(x)+\ldots+f_n(x)=0 \\ \hline f_1(x)\geqslant 0 \\ f_2(x)\geqslant 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ f_n(x)\geqslant 0 \end{array}} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} f_1(x)=0 \\ f_2(x)=0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ f_n(x)=0 \end{cases}}$

Сумма нескольких неотрицательных функций равна нулю тогда и только тогда, когда все функции одновременно равны нулю

Пример. $\sqrt{x-2}+\left|x^3-8\right|+\lg\left(1+\sqrt{x^2-4}\right)=0$

Решение. Так как $f_1(x)=\sqrt{x-2}\geqslant 0$, $f_2(x)=\left|x^3-8\right|\geqslant 0$, $f_3(x)=\lg\left(1+\sqrt{x^2-4}\right)\geqslant 0$, то данное уравнение равносильно системе

$\begin{cases} \sqrt{x-2}=0, \\ \left|x^3-8\right|=0, \\ \lg\left(1+\sqrt{x^2-4}\right)=0. \end{cases}$

Из первого уравнения находим $x=2$, что удовлетворяет всей системе.

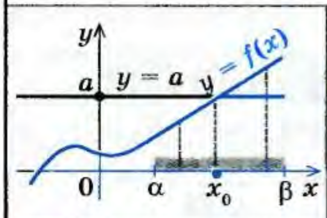
Ответ: $x=2$

3. Использование монотонности функции

Схема решения

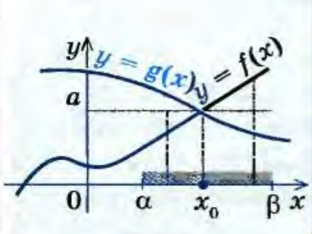
1. ***Подбираем один или несколько корней уравнения.***
2. ***Доказываем, что других корней это уравнение не имеет*** *(используя теоремы о корнях уравнений или оценку левой и правой частей)*

Теоремы о корнях уравнений



Теорема 1. **Если в уравнении $f(x)=a$ функция $f(x)$ возрастает (убывает) на некотором промежутке, то это уравнение может иметь не более чем один корень на этом промежутке**

Пример. Уравнение $\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}=2$ имеет единственный корень $x=1$ $\left(\sqrt{1}+\sqrt[3]{1}=2,\right.$ т. е. $\left.2=2\right)$, так как функция $f(x)=\sqrt{x}+\sqrt[3]{x}$ возрастает (на всей области определения $x\geqslant 0$)



Теорема 2. **Если в уравнении $f(x)=g(x)$ функция $f(x)$ возрастает на некотором промежутке, а функция $g(x)$ убывает на этом промежутке (или наоборот), то это уравнение может иметь не более чем один корень на этом промежутке**

Пример. Уравнение $2^x=6-x$ имеет единственный корень $x=2$ ($2^2=6-2$, т. е. $4=4$), так как функция $f(x)=2^x$ — возрастает, а функция $g(x)=6-x$ — убывает на всей числовой прямой

4. «Ищи квадратный трехчлен»	
Попробуйте рассмотреть данное уравнение как квадратное относительно какой-либо переменной (или какой-либо функции)	**Пример.** $4^x - (7 - x)\,2^x + 12 - 4x = 0$. *Решение.* Запишем $4^x = 2^{2x}$ и введем замену $2^x = t$. Получаем $t^2 - (7 - x)\,t + 12 - 4x = 0$ Рассмотрим это уравнение как квадратное относительно t. Его дискриминант $D = (7 - x)^2 - 4\,(12 - 4x) = x^2 + 2x + 1 = (x + 1)^2$. Тогда $t_{1,2} = \frac{7 - x \pm (x+1)}{2}$, т. е. $t_1 = 4$, $t_2 = 3 - x$. Обратная замена дает уравнения: $2^x = 4$ (отсюда $x = 2$) или $2^x = 3 - x$ (имеет единственный корень $x = 1$, так как функция $f(x) = 2^x$ — возрастает, а функция $g(x) = 3 - x$ — убывает). *Ответ*: 1; 2

Таблица 44

РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ, СОДЕРЖАЩИХ ЗНАК МОДУЛЯ

Способы решения

По определению

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{если } a > 0 \\ 0, & \text{если } a = 0 \\ -a, & \text{если } a < 0 \end{cases}$$

Исходя из геометрического смысла

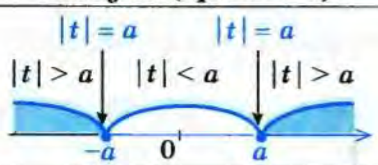
$|a|$ — расстояние на числовой прямой от точки 0 до точки a

1. $|f(x)| = a$
2. $|f(x)| = |g(x)|$
3. $|f(x)| > a$
4. $|f(x)| < a$

По общей схеме

1. Найти ОДЗ.
2. Найти нули всех подмодульных функций.
3. Отметить нули на ОДЗ и разбить ОДЗ на интервалы.
4. Найти решение в каждом интервале (и проверить, входит ли это решение в рассмотренный интервал)

Использование геометрического смысла модуля (при $a > 0$)



1. $|f(x)| = a \Leftrightarrow (f(x) = a$ или $f(x) = -a)$
2. $|f(x)| = |g(x)| \Leftrightarrow (f(x) = g(x)$ или $f(x) = -g(x))$
3. $|f(x)| > a \Leftrightarrow (f(x) < -a$ или $f(x) > a)$
4. $|f(x)| < a \Leftrightarrow -a < f(x) < a \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -a \\ f(x) < a \end{cases}$

Обобщения

5. $|f(x)| = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0 \\ f(x) = g(x) \text{ или } f(x) = -g(x) \end{cases}$
6. $|f(x)| > g(x) \Leftrightarrow (f(x) < -g(x)$ или $f(x) > g(x))$
7. $|f(x)| < g(x) \Leftrightarrow -g(x) < f(x) < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > -g(x) \\ f(x) < g(x) \end{cases}$

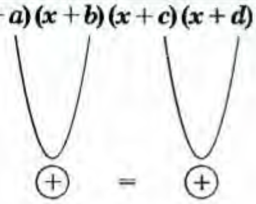
Использование специальных соотношений

1. $|u| = u \Leftrightarrow u \geqslant 0$
2. $|u| = -u \Leftrightarrow u \leqslant 0$
3. $|u| = |v| \Leftrightarrow u^2 = v^2$
4. $|u| > |v| \Leftrightarrow u^2 > v^2$ или
   $|u| - |v| > 0 \Leftrightarrow u^2 - v^2 > 0$
   Знак разности модулей двух выражений совпадает со знаком разности их квадратов
5. $|u| + |v| = u + v \Leftrightarrow \begin{cases} u \geqslant 0 \\ v \geqslant 0 \end{cases}$
6. $|u| + |v| = -u - v \Leftrightarrow \begin{cases} u \leqslant 0 \\ v \leqslant 0 \end{cases}$
7. $|u| + |v| = |u + v| \Leftrightarrow uv \geqslant 0$
8. $|u| + |v| = |u - v| \Leftrightarrow uv \leqslant 0$
9. $|x - a| + |x - b| = b - a \Leftrightarrow a \leqslant x \leqslant b$, где $a < b$

ЗАМЕНА ПЕРЕМЕННЫХ ПРИ РЕШЕНИИ НЕКОТОРЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Если в уравнение (неравенство или тождество) переменная входит в виде некоторой функции от одного и того же выражения, то, как правило, обычно удобно это одинаковое выражение с переменной обозначить одной буквой (новой переменной)

Примеры замены переменных (см. также табл. 46)

Вид уравнения	Замена (или план решения)	Примеры
Биквадратное уравнение $ax^4 + bx^2 + c = 0\ (a \neq 0)$	$\boxed{x^2 = t}$ (приводит к квадратному уравнению)	$x^4 + 6x^2 - 7 = 0.$ *Решение.* **Замена:** $x^2 = t$. Получим $t^2 + 6t - 7 = 0$; $t_1 = 1$, $t_2 = -7$. **Обратная замена:** $x^2 = 1$ или $x^2 = -7$. Отсюда $x = \pm 1$ ($x^2 = -7$ корней не имеет)
Сводящееся к биквадратному уравнению $(x + a)^4 + (x + b)^4 = c$	$\boxed{t = \frac{(x+a)+(x+b)}{2}}$	$(x + 1)^4 + (x + 3)^4 = 16.$ *Решение.* **Замена:** $t = \frac{(x+1)+(x+3)}{2} = x+2$ (Тогда $x = t - 2$.) Получаем $t^4 + 6t^2 - 7 = 0$. Его решения (см. выше): $t_1 = 1$, $t_2 = -1$. Тогда $x_1 = t_1 - 2 = -1$; $x_2 = t_2 - 2 = -3$
$(x+a)(x+b)(x+c)(x+d) = e$ 	**Перегруппировать сомножители так (если возможно), чтобы выполнялось равенство** $\boxed{a + b = c + d}$, **и попарно раскрыть скобки**	$(x - 4)(x - 2)(x + 1)(x + 3) = 24.$ *Решение.* Перепишем уравнение таким образом: $(x - 4)(x + 3)(x - 2)(x + 1) = 24$ (тогда $-4 + 3 = -2 + 1$) и раскроем скобки. Получаем $(x^2 - x - 12)(x^2 - x - 2) = 24$. **Замена** $x^2 - x = t$ дает уравнение $(t - 12)(t - 2) = 24$. Тогда $t^2 - 14t = 0$ и $t_1 = 0$, $t_2 = 14$. **Обратная замена дает уравнение** $x^2 - x = 0$ или $x^2 - x = 14$. Отсюда $x_1 = 0$, $x_2 = 1$, $x_{3,4} = \frac{1 \pm \sqrt{57}}{2}$
$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x \pm \frac{1}{x}\right) + c = 0$ $(a \neq 0)$	$\boxed{x \pm \frac{1}{x} = t}$ Тогда $\left(x \pm \frac{1}{x}\right)^2 = t^2$ и отсюда $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 \mp 2$	$6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) = 38.$ *Решение.* **Замена:** $x + \frac{1}{x} = t$. Тогда $x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$. Получаем $6(t^2 - 2) + 5t = 38$. Отсюда $t_1 = \frac{5}{2}$; $t_2 = -\frac{10}{3}$. **Обратная замена:** $x + \frac{1}{x} = \frac{5}{2}$ или $x + \frac{1}{x} = -\frac{10}{3}$. Решая эти уравнения, получаем $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{1}{2}$, $x_3 = -3$, $x_4 = -\frac{1}{3}$.
Возвратное уравнение *Уравнение вида $f(x) = 0$, где $f(x)$ — многочлен стандартного вида, у которого равны коэффициенты членов, одинаково удаленных от начала и конца уравнения*	**Уравнение четной степени** *делим на степень среднего члена и группируем члены с одинаковыми коэффициентами.* **Уравнение нечетной степени** всегда имеет корень $x = -1$, делим его на $x + 1$ (получаем возвратное уравнение четной степени)	$6x^4 + 5x^3 - 38x^2 + 5x + 6 = 0.$ *Решение.* Это возвратное уравнение четной степени. Так как $x = 0$ не является его решением, то, разделив обе части на $x^2 \neq 0$ (x^2 — степень с переменной среднего члена), получим уравнение, равносильное данному. Группируя члены с одинаковыми коэффициентами, получаем уравнение $6\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + 5\left(x + \frac{1}{x}\right) - 38 = 0$, решения которого приведены выше

ОДНОРОДНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Определение. Если все члены уравнения (в левой и правой частях которого стоят многочлены от двух переменных или от двух видов переменных) имеют одинаковую суммарную степень, то уравнение называется ***однородным***.

Решается однородное уравнение делением на наивысшую степень одной из переменных

Примеры решений однородных уравнений

1. Целое алгебраическое	2. Иррациональное	3. Тригонометрическое	4. Показательное	5. Логарифмическое
$(x^2-5)^2-$ $-3(x^2-5)(2x-5)+$ $+2(2x-5)^2=0$	$\sqrt[3]{(x-6)^2}-3\sqrt[3]{(x-6)(2x+3)}+$ $+2\sqrt[3]{(2x+3)^2}=0$	$\sin^2 x-3\sin x\cos x+$ $+2\cos^2 x=0$	$5^{2x}-3\cdot5^x\cdot7^x+2\cdot7^{2x}=0$	$\lg^2 x-3\lg x\lg(2x-1)+$ $+2\lg^2(2x-1)=0$
$\boxed{x^2-5=u;\ 2x-5=v}$	$\boxed{\sqrt[3]{x-6}=u;\ \sqrt[3]{2x+3}=v}$	$\boxed{\sin x=u;\ \cos x=v}$	$\boxed{5^x=u;\ 7^x=v}$	$\boxed{\lg x=u;\ \lg(2x-1)=v}$

Выполнив замену, во всех случаях получаем $\boxed{u^2-3uv+2v^2=0}$ (*) — ***однородное уравнение второй степени***

I. При $v=0$ из уравнения (*) получаем $u=0$, и в этом случае решение уравнения (*) совпадает з решением системы $\begin{cases}u=0,\\v=0.\end{cases}$
Решаем эту систему для каждого приведенного примера

1. Решений нет	2. Решений нет	3. Решений нет	4. Решений нет	5. Решение $\boxed{x=1}$

II. При $v\neq0$ делим обе части уравнения (*) на $v^2\neq0$. Получаем $\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)^2-3\frac{u}{v}+2=0}$. Замена: $\frac{u}{v}=t$. Тогда $t^2-3t+2=0$. Отсюда $t_1=1$; $t_2=2$

Обратная замена дает совокупность уравнений $\frac{u}{v}=1$ или $\frac{u}{v}=2$. Для каждого примера получаем

$\frac{x^2-5}{2x-5}=1$ или $\frac{x^2-5}{2x-5}=2$ $x^2-2x=0$ или $x^2-4x+5=0$ $\boxed{x_1=0;\ x_2=2}$ $\boxed{\text{корней нет}}$	$\frac{\sqrt[3]{x-6}}{\sqrt[3]{2x+3}}=1$ или $\frac{\sqrt[3]{x-6}}{\sqrt[3]{2x+3}}=2$ $\frac{x-6}{2x+3}=1$ или $\frac{x-6}{2x+3}=8$ $\boxed{x=-9}$ $\boxed{x=-2}$	$\frac{u}{v}=\frac{\sin x}{\cos x}=\operatorname{tg} x$ $\operatorname{tg} x=1$ или $\operatorname{tg} x=2$ $\boxed{x=\frac{\pi}{4}+\pi k,\ k\in \mathbf{Z}}$ $\boxed{x=\operatorname{arctg} 2+\pi n,\ n\in \mathbf{Z}}$	$\frac{u}{v}=\frac{5^x}{7^x}=\left(\frac{5}{7}\right)^x$ $\left(\frac{5}{7}\right)^x=1$ или $\left(\frac{5}{7}\right)^x=2$ $\boxed{x=0}$ $\boxed{x=\log_{\frac{5}{7}}2}$	$\frac{\lg x}{\lg(2x-1)}=1$ или $\frac{\lg x}{\lg(2x-1)}=2$ ОДЗ: $x>\frac{1}{2}$; $x\neq1$ $\lg x=\lg(2x-1)$ или $\lg x=2\lg(2x-1)$ $x=2x-1$ $x=1$ — не входит в ОДЗ $x=(2x-1)^2$ $4x^2-5x+1=0$ $x_1=1$ — не принадлежит ОДЗ; $\boxed{x_2=\frac{1}{4}}$
Ответ: 0; 2	*Ответ:* −9; −2	*Ответ:* $\frac{\pi}{4}+\pi k$, $k\in \mathbf{Z}$, $\operatorname{arctg} 2+\pi n$, $n\in \mathbf{Z}$	*Ответ:* 0; $\log_{\frac{5}{7}}2$	*Ответ:* 1; $\frac{1}{4}$ *($x=1$ — корень из I этапа решения)*

Таблица 47

ПРИЧИНЫ ПОЯВЛЕНИЯ ПОСТОРОННИХ КОРНЕЙ И ПОТЕРИ КОРНЕЙ ПРИ РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЙ

Причина	При каких преобразованиях это может происходить	Пример неправильного (или неполного) решения	Где ошибка	Как получить правильное (или полное) решение	Пример правильного (или полного) решения
1. Появление посторонних корней при решении уравнения					
Получение уравнений-следствий:	**1. Приведение подобных членов**	$x^2+\sqrt{x-2}=6x+\sqrt{x-2}$. Перенесем из правой части уравнения в левую слагаемое $\sqrt{x-2}$ с противоположным знаком и приведем подобные члены. Получим $x^2-6x=0$, $x_1=0$, $x_2=6$	$x_1=0$ не является корнем заданного уравнения	**Выполнить проверку подстановкой корней в заданное уравнение**	$x^2+\sqrt{x-2}=6x+\sqrt{x-2}$. $x^2-6x=0$, $x_1=0$, $x_2=6$. Проверка показывает, что $x_1=0$ — посторонний корень, $x_2=6$ — корень. *Ответ:* 6
а) переход к уравнению, ОДЗ которого шире, чем ОДЗ заданного уравнения;	**2. Приведение обеих частей уравнения к общему знаменателю** (при отбрасывании знаменателя)	$\frac{4}{x+2}+\frac{7}{x+3}=\frac{4}{x^2+5x+6}$. Умножим обе части уравнения на общий знаменатель всех дробей $(x+2)(x+3)$. Получим $4(x+3)+7(x+2)=4$, $11x=-22$, $x=-2$	$x=-2$ не является корнем заданного уравнения		$\frac{4}{x+2}+\frac{7}{x+3}=\frac{4}{x^2+5x+6}$. $4(x+3)+7(x+2)=4$; $11x=-22$, $x=-2$. Проверка показывает, что $x=-2$ — посторонний корень. *Ответ:* корней нет
	3. Возведение обеих частей иррационального уравнения в квадрат	$\sqrt{2x+1}=\sqrt{x}$. $2x+1=x$, $x=-1$	$x=-1$ не является корнем заданного уравнения		$\sqrt{2x+1}=\sqrt{x}$. $2x+1=x$, $x=-1$. Проверка показывает, что $x=-1$ — посторонний корень. *Ответ:* корней нет
б) выполнение преобразований, при которых происходит неявное умножение на нуль;	**Умножение обеих частей уравнения на выражение с переменной**	$x^2+x+1=0$. Умножим обе части уравнения на $x-1$. $(x-1)(x^2+x+1)=0$. Получим $x^3-1=0$, $x=1$	$x=1$ не является корнем заданного уравнения		В данном уравнении не было необходимости умножать на $x-1$. $x^2+x+1=0$. $D=-3<0$. *Ответ:* корней нет. Если применить умножение обеих частей уравнения на $x-1$, то проверка показывает, что $x=1$ — посторонний корень, то есть уравнение не имеет корней

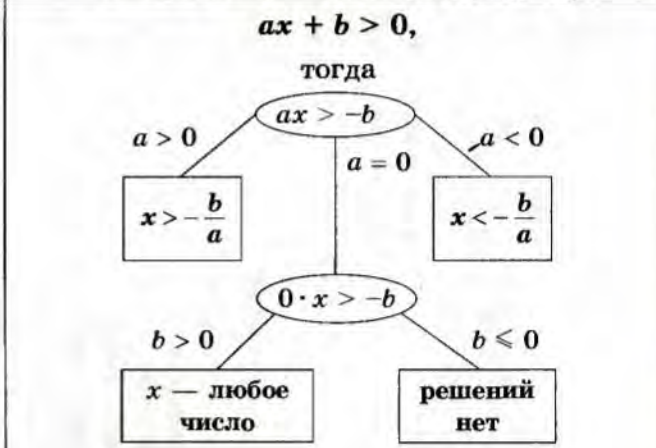
в) применение к обеим частям уравнения функции, которая не является возрастающей или убывающей	**Возведение обеих частей уравнения в четную степень или применение к обеим частям уравнения тригонометрических функций**	$x - 1 = 2x + 1$. Возведем обе части уравнения в квадрат: $(x-1)^2 = (2x+1)^2$. Получим $3x^2 + 6x = 0$, $x_1 = 0$, $x_2 = -2$	$x_1 = 0$ не является корнем заданного уравнения	**Выполнить проверку подстановкой корней в заданное уравнение**	При решении данного уравнения не было необходимости возводить в квадрат. $x - 1 = 2x + 1$. $x - 2x = 1 + 1$, $x = -2$. *Ответ:* -2. Если применить возведение в квадрат, то проверка показывает, что $x_2 = -2$ — корень, а $x_1 = 0$ — посторонний корень
2. Потеря корней при решении уравнения					
Явное или неявное *сужение ОДЗ заданного уравнения*, в частности выполнение преобразований, в ходе которых происходит неявное деление на нуль	**1. Деление обеих частей уравнения на выражение с переменной**	$x^2 = x$. Поделив обе части уравнения на x, получим $x = 1$	Потеряли корень $x = 0$, поскольку после деления на x фактически получили уравнение $\frac{x^2}{x} = \frac{x}{x}$, ОДЗ которого: $x \neq 0$, то есть сузили ОДЗ заданного уравнения	**Те значения, на которые сузилась ОДЗ, необходимо рассмотреть отдельно**	$x^2 = x$. 1. При $x = 0$ получаем $0^2 = 0$ — верное равенство, таким образом, $x = 0$ — корень. 2. При $x \neq 0$ получаем $\frac{x^2}{x} = \frac{x}{x}$, $x = 1$ *Ответ:* 0; 1 (Конечно, *удобнее решать так:* $x^2 - x = 0$, $x(x-1) = 0$, $x = 0$ или $x = 1$.)
	2. Сложение, вычитание, умножение или деление обеих частей уравнения на выражение, ОДЗ которого у́же, чем ОДЗ заданного уравнения	$x^2 = 1$. Если к обеим частям уравнения прибавить $\sqrt{x}$, то получим уравнение $x^2 + \sqrt{x} = 1 + \sqrt{x}$, у которого только один корень $x = 1$	Потеряли корень $x = -1$, поскольку ОДЗ данного уравнения: x — любое число, а $\sqrt{x}$ существует только при $x \geqslant 0$		При решении данного уравнения не было необходимости прибавлять к обеим частям $\sqrt{x}$. $x^2 = 1$, $x = \pm 1$. *Ответ:* ± 1. (Если бы пришлось прибавить к обеим частям $\sqrt{x}$, то при $x < 0$ данное уравнение необходимо рассмотреть отдельно, и тогда получим еще и корень $x = -1$.)

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Линейные уравнения	Линейные неравенства
Определение. ***Линейным уравнением*** с одной переменной x называют уравнение вида $ax + b = 0$, где a и b — действительные числа	**Определение.** ***Линейным неравенством*** с одной переменной x называют неравенство вида $ax + b > 0$ (< 0, $\geqslant 0$, $\leqslant 0$)
Если $a \neq 0$, *то линейное уравнение называют также* ***уравнением первой степени***	Если $a \neq 0$, *то линейное неравенство называют также* ***неравенством первой степени***
Схема решения	**Схема решения (для случая > 0)**

Схема решения

Схема решения (для случая > 0)



КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Определение. Уравнение вида $ax^2 + bx + c = 0$, где a, b, c — некоторые числа, причем $a \neq 0$, называют ***квадратным***

Уравнение общего вида

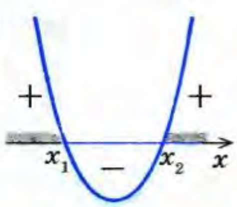
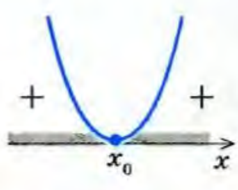
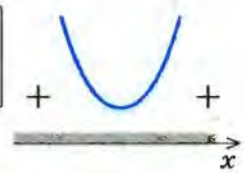
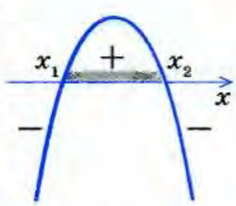
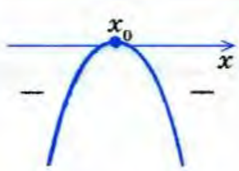
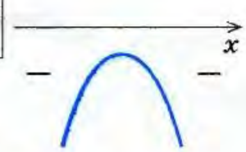
Приведенное уравнение ($a = 1$)

Теорема Виета

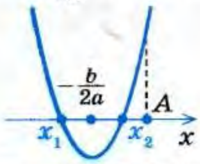
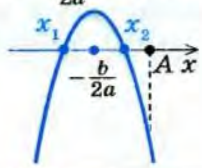
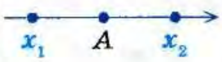
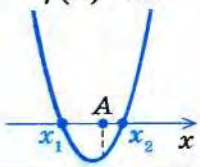
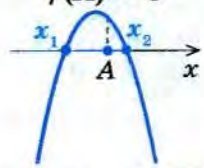
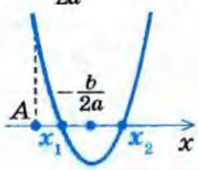
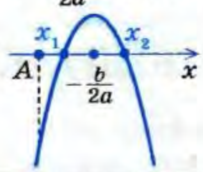
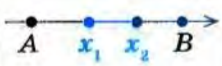
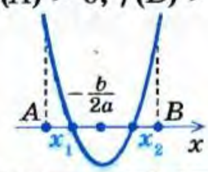
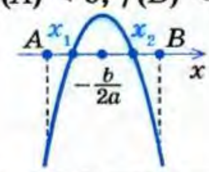
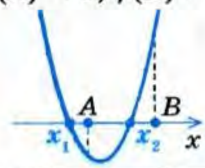
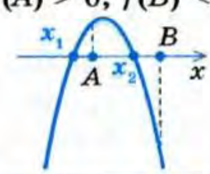
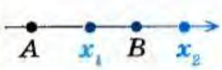
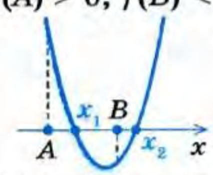
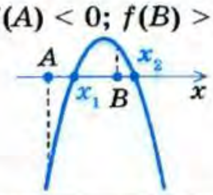
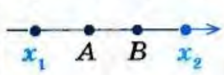
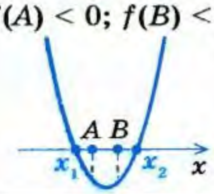
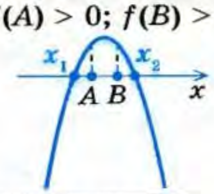
В общем случае		Для приведенного уравнения	
Если x_1 и x_2 — корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то	$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$; $x_1 x_2 = \frac{c}{a}$	***Если x_1 и x_2 — корни приведенного квадратного уравнения $x^2 + px + q = 0$, то***	$x_1 + x_2 = -p$; $x_1 x_2 = q$

Обратная теорема	
Если сумма каких-то двух чисел x_1 и x_2 равна $-\frac{b}{a}$, а произведение равно $\frac{c}{a}$, то эти числа являются корнями квадратного уравнения $$ax^2 + bx + c = 0$$	**Если сумма каких-то двух чисел x_1 и x_2 равна $-p$, а произведение равно q, то эти числа являются корнями приведенного квадратного уравнения** $$x^2 + px + q = 0$$
Разложение квадратного трехчлена на множители	
Если x_1 и x_2 — корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ (т. е. корни уравнения $ax^2 + bx + c = 0$), то $$ax^2 + bx + c = a\,(x - x_1)\,(x - x_2)$$	**Пример.** $2x^2 - 5x + 3 = 0$ при $x_1 = 1$; $x_2 = \frac{3}{2}$. $$2x^2 - 5x + 3 = 2\,(x - 1)\left(x - \frac{3}{2}\right)$$
Если дискриминант квадратного трехчлена равен нулю ($D = 0$), то $x_1 = x_2$ и тогда $ax^2 + bx + c = a\,(x - x_1)^2$ **при** $D = 0$	**Пример.** $4x^2 + 24x + 36 = 0$ при $x_{1,\,2} = -3$. $$4x^2 + 24x + 36 = 4\,(x + 3)\,(x + 3) = 4\,(x + 3)^2$$

Таблица 50

КВАДРАТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА		
Определение. Неравенство вида $ax^2 + bx + c > 0$ (< 0, $\geqslant 0$, $\leqslant 0$) называют ***квадратным***, если $a \neq 0$		
Чтобы решить квадратное неравенство, достаточно найти корни квадратного трехчлена и построить эскиз его графика (параболу). В качестве ответа записываются промежутки оси Ox, для которых точки параболы расположены выше оси Ox (для случая > 0) и ниже оси Ox (для случая < 0). (Если квадратный трехчлен имеет два различных корня x_1 и x_2, можно также воспользоваться методом интервалов — см. табл. 40)		
$ax^2 + bx + c > 0$ ($D = b^2 - 4ac$)		
$a > 0$, $D > 0$  $x \in (-\infty;\, x_1) \cup (x_2;\, +\infty)$	$a > 0$, $D = 0$  $x \in (-\infty;\, x_0) \cup (x_0;\, +\infty)$	$a > 0$, $D < 0$  $x \in \mathbf{R}$ ($x \in (-\infty;\, +\infty)$)
$a < 0$, $D > 0$  $x \in (x_1;\, x_2)$	$a < 0$, $D = 0$  Решений нет	$a < 0$, $D < 0$  Решений нет

УСЛОВИЯ РАСПОЛОЖЕНИЯ КОРНЕЙ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА $f(x) = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$, $D = b^2 - 4ac$) относительно данных чисел A и B

Условия для корней	Достаточные условия		
	при $a > 0$	при $a < 0$	в общем случае ($a \neq 0$)
$x_1 < A$; $x_2 < A$ 	$D \geqslant 0$; $-\frac{b}{2a} < A$; $f(A) > 0$ 	$D \geqslant 0$; $-\frac{b}{2a} < A$; $f(A) < 0$ 	$\begin{cases} D \geqslant 0, \\ -\frac{b}{2a} < A, \\ a \cdot f(A) > 0 \end{cases}$
$x_1 < A < x_2$ 	$f(A) < 0$ 	$f(A) > 0$ 	$a \cdot f(A) < 0$
$x_1 > A$; $x_2 > A$ 	$D \geqslant 0$; $-\frac{b}{2a} > A$; $f(A) > 0$ 	$D \geqslant 0$; $-\frac{b}{2a} > A$; $f(A) < 0$ 	$\begin{cases} D \geqslant 0, \\ -\frac{b}{2a} > A, \\ a \cdot f(A) > 0 \end{cases}$
$A < x_1 < B$ $A < x_2 < B$ 	$D \geqslant 0$; $A < -\frac{b}{2a} < B$; $f(A) > 0$; $f(B) > 0$ 	$D \geqslant 0$; $A < -\frac{b}{2a} < B$; $f(A) < 0$; $f(B) < 0$ 	$\begin{cases} D \geqslant 0, \\ A < -\frac{b}{2a} < B, \\ a \cdot f(A) > 0, \\ a \cdot f(B) > 0 \end{cases}$
$x_1 < A$; $A < x_2 < B$ 	$f(A) < 0$; $f(B) > 0$ 	$f(A) > 0$; $f(B) < 0$ 	$\begin{cases} a \cdot f(A) < 0, \\ a \cdot f(B) > 0 \end{cases}$
$A < x_1 < B$; $x_2 > B$ 	$f(A) > 0$; $f(B) < 0$ 	$f(A) < 0$; $f(B) > 0$ 	$\begin{cases} a \cdot f(A) > 0, \\ a \cdot f(B) < 0 \end{cases}$
$x_1 < A$; $x_2 > B$ 	$f(A) < 0$; $f(B) < 0$ 	$f(A) > 0$; $f(B) > 0$ 	$\begin{cases} a \cdot f(A) < 0, \\ a \cdot f(B) < 0 \end{cases}$

ДРОБНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Схема решения

Решение дробных уравнений

Использование уравнений-следствий

1. Приводим к виду $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0.$
2. Находим корни уравнения $f(x) = 0.$
3. Выполняем проверку подстановкой корней в исходное уравнение

Использование свойств соответствующих функций

(см. табл. 43)

Решение дробных неравенств

Использование равносильных преобразований

1. Фиксируем ОДЗ исходного уравнения (неравенства).
2. Приводим к виду $\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ $\left(\dfrac{f(x)}{g(x)} \gtrless 0\right.$ и решаем эти уравнения (неравенства) на ОДЗ исходного или выполняем равносильные преобразования так, чтобы ввести удобную замену переменной (см. также табл. 41)

Использование метода интервалов

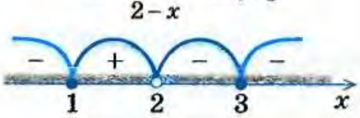
1. Переносим все члены неравенства в одну сторону.
2. Приводим к общему знаменателю, обязательно сохраняя знаменатель.
3. Решаем методом интервалов (см. табл. 40)

Равносильные преобразования простейших дробных уравнений и неравенств

В общем виде	Пример
$\dfrac{f(x)}{g(x)} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 0, \\ g(x) \neq 0 \end{cases}$	$\dfrac{x^2-4}{x^3-5x-2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4=0, \\ x^3-5x-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=2 \text{ или } x=-2, \\ x^3-5x-2 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$
$\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) < 0 \end{cases}$	$\dfrac{x-1}{x-2} > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1>0, \\ x-2>0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x-1<0, \\ x-2<0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x>1, \\ x>2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x<1, \\ x<2 \end{cases} \Leftrightarrow x>2$ или $x<1$
$\dfrac{f(x)}{g(x)} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < 0, \\ g(x) > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) > 0, \\ g(x) < 0 \end{cases}$	$\dfrac{x-1}{x-2} < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1<0, \\ x-2>0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x-1>0, \\ x-2<0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x<1, \\ x>2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x>1, \\ x<2 \end{cases} \Leftrightarrow 1<x<2$
$\dfrac{f(x)}{g(x)} \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) > 0 \end{cases}$ или $\begin{cases} f(x) \leqslant 0, \\ g(x) < 0 \end{cases}$	$\dfrac{x-1}{x-2} \geqslant 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x-1\geqslant 0, \\ x-2>0 \end{cases}$ или $\begin{cases} x-1\leqslant 0, \\ x-2<0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x\geqslant 1, \\ x>2 \end{cases}$ или $\begin{cases} x\leqslant 1, \\ x<2 \end{cases} \Leftrightarrow x>2$ или $x \leqslant 1$

Пример решения дробного неравенства методом интервалов

$$\frac{(x-1)(x-3)^2}{2-x} \geqslant 0$$



1. ОДЗ: $x \neq 2$. **2. Нули функции:** $f(x) = \dfrac{(x-1)(x-3)^2}{2-x} = 0$ при $x = 1$ или $x = 3$. **3.** Отмечаем нули функции на ОДЗ и находим знак $f(x)$ в каждом интервале.

Ответ: $x \in [1; 2)$ или $x = 3$

ИРРАЦИОНАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Определение. ***Иррациональным уравнением (неравенством)*** называют уравнение (неравенство), которое содержит переменную под знаком корня n-й степени (радикала)

Схема решения

Решение иррациональных уравнений

- ***Использование уравнений-следствий***
  В конце — проверка подстановкой в исходное уравнение (см. табл. 40)
- ***Использование свойств соответствующих функций***
  (см. табл. 43)
- ***Использование равносильных преобразований***
  (на ОДЗ исходного) (см. табл. 41)

Решение иррациональных неравенств

- ***Использование равносильных преобразований***
  (на ОДЗ исходного) (см. табл. 41)
- ***Использование метода интервалов***
  для неравенств вида $f(x) \gtrless 0$ (см. табл. 40 и приложение с. 25)

Направление преобразований

Переход от иррациональных уравнений и неравенств к рациональным путем:

а) возведения обеих частей уравнения или неравенства в одну и ту же степень;

б) специальных замен

Теоремы о равносильности некоторых иррациональных уравнений (неравенств)

Для уравнений	Для неравенств
$\sqrt[2k+1]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow f(x) = g^{2k+1}(x)$	$\sqrt[2k+1]{f(x)} \gtrless g(x) \Leftrightarrow f(x) \gtrless g^{2k+1}(x)$

При возведении обеих частей уравнения (или неравенства) в нечетную степень (с сохранением знака неравенства) получаем уравнение (или неравенство), равносильное данному

$$\sqrt[2k]{f(x)} = g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) = g^{2k}(x) \end{cases}$$

$$\sqrt[2k]{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) \geqslant 0, \\ f(x) > g^{2k}(x) \end{cases} \text{ или } \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) < 0 \end{cases}$$

$$\sqrt[2k]{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geqslant 0, \\ g(x) > 0, \\ f(x) < g^{2k}(x) \end{cases}$$

Если обе части уравнения (или неравенства) неотрицательны, то при возведении обеих частей в четную степень (с сохранением знака неравенства) получаем уравнение (или неравенство), равносильное данному (на ОДЗ данного)

$$\sqrt[2k]{f(x)} = \sqrt[2k]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ f(x) \geqslant 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = g(x), \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases}$$

$$\sqrt[2k]{f(x)} > \sqrt[2k]{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x), \\ g(x) \geqslant 0 \end{cases}$$

Схема выполнения равносильных преобразований простейших иррациональных уравнений

$\sqrt[2k]{f(x)}=a$		$\sqrt[2k+1]{f(x)}=a$
$a \geqslant 0$: $f(x)=a^{2k}$	$a<0$: корней нет	$f(x)=a^{2k+1}$
(Так как $a \geqslant 0$, то $f(x)=a^{2k} \geqslant 0$, т. е. ОДЗ исходного уравнения учтена автоматически)	(Так как знак $\sqrt[2k]{f(x)}$ означает только арифметическое значение корня, т. е. $\sqrt[2k]{f(x)} \geqslant 0$)	
Пример. $\sqrt{x-3}=2$. *Решение* $x-3=2^2$, $x=7$. *Ответ:* 7	**Пример.** $\sqrt{x-3}=-2$. *Решение* Так как $\sqrt{x-3} \geqslant 0$ всегда (на ОДЗ), то корней нет. *Ответ:* корней нет	**Пример.** $\sqrt[3]{x-3}=-2$. *Решение* $x-3=(-2)^3$, $x-3=-8$, $x=-5$. *Ответ:* -5

Схема выполнения равносильных преобразований простейших иррациональных неравенств

$\sqrt[2k]{f(x)}>a$		$\sqrt[2k]{f(x)}<a$		$\sqrt[2k+1]{f(x)} \gtrless a$
$a \geqslant 0$: $f(x)>a^{2k}$	$a<0$: $f(x) \geqslant 0$	$a>0$: $0 \leqslant f(x)<a^{2k}$	$a \leqslant 0$: решений нет	$f(x) \gtrless a^{2k+1}$
(Так как $a \geqslant 0$, то $f(x)>a^{2k} \geqslant 0$, т. е. ***ОДЗ учтена автоматически***)	(Т. е. ***x — любое число из ОДЗ***)	(***Знак неравенства сохраняется, и учтена ОДЗ***)	(Так как $\sqrt[2k]{f(x)} \geqslant 0$)	(***Знак неравенства сохраняется***)
Пример $\sqrt{x-3}>2$. *Решение* $x-3>2^2$, $x>7$. *Ответ:* $(7; +\infty)$	**Пример** $\sqrt{x-3}>-2$. *Решение* x — любое число из ОДЗ, т. е. $x-3 \geqslant 0$, $x \geqslant 3$. *Ответ:* $[3; +\infty)$	**Пример** $\sqrt{x-3}<2$. *Решение* Учитывая ОДЗ, получаем $0 \leqslant x-3<4$, т. е. $3 \leqslant x<7$. *Ответ:* $[3; 7)$	**Пример** $\sqrt{x-3}<-2$. *Решение* Так как $\sqrt{x-3} \geqslant 0$ всегда (на ОДЗ), то решений нет. *Ответ:* решений нет	**Пример** $\sqrt[3]{x-3}<-2$. *Решение* $x-3<(-2)^3$, $x-3<-8$, $x<-5$. *Ответ:* $(-\infty; -5)$

ПОКАЗАТЕЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Опорные формулы и соотношения (см. также табл. 18–21, 38)

Формулы

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n} \qquad \frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$$

$$(a^m)^n = a^{mn} \qquad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}}$$

$$a^n \cdot b^n = (ab)^n \qquad \left(\frac{a^n}{b^n}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^n$$

Любая возрастающая (убывающая) на промежутке функция принимает каждое свое значение только в одной точке из этого промежутка

$$\boxed{\begin{matrix} a^\alpha = b \\ a > 0,\ a \ne 1,\ b > 0 \end{matrix}} \Leftrightarrow \alpha = \log_a b$$

Графики функции $y = a^x$ ($a > 0$)

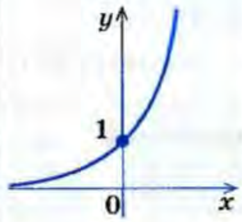
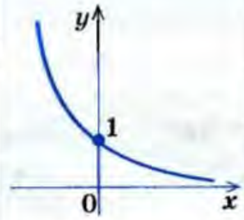
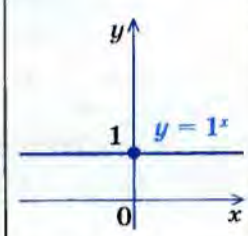
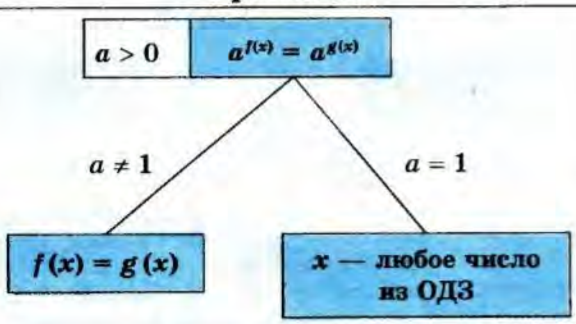
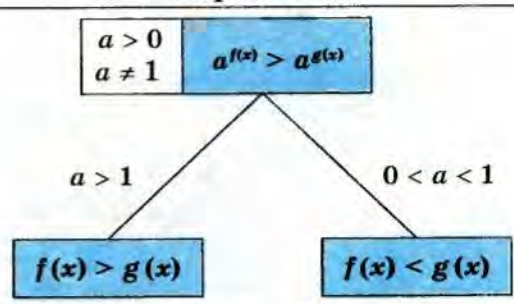
$a > 0$	$0 < a < 1$	$a = 1$
		
Возрастает	***Убывает***	***Постоянная***

Схема выполнения равносильных преобразований простейших показательных уравнений и неравенств

Уравнения



Неравенства



Знак неравенства не меняется

Знак неравенства меняется на противоположный

Если в левой и правой частях показательного уравнения (неравенства) стоят только произведения, частные, корни или степени, то данное уравнение (неравенство) можно непосредственно свести к простейшему применением опорных формул слева направо (пример 5) или решить логарифмированием обеих частей (пример 6)

Примеры решения простейших показательных уравнений

1. $2^{x+1} = 8.$	**2.** $5^{x-3} = 1.$	**3.** $3^{x+4} = -3.$	**4.** $7^{x-1} = 3.$
Решение $2^{x+1} = 2^3,$ $x + 1 = 3,$ $x = 2.$	*Решение* $5^{x-3} = 5^0,$ $x - 3 = 0,$ $x = 3.$	*Решение* Корней нет (так как $3^t > 0$ для всех t).	*Решение* $x - 1 = \log_7 3,$ $x = 1 + \log_7 3.$
Ответ: 2	*Ответ:* 3	*Ответ:* корней нет	*Ответ:* $1 + \log_7 3$

5. ***Приведение степеней к одному основанию***	6. ***Логарифмирование обеих частей уравнения***	7. ***В основании степени — параметр***
$\frac{100^{x-1}}{\sqrt[3]{10^x}}=2^x\cdot 5^x.$ *Решение* $\frac{10^{2(x-1)}}{10^{\frac{x}{3}}}=(2\cdot 5)^x,$ $10^{2(x-1)-\frac{x}{3}}=10^x,$ $2(x-1)-\frac{x}{3}=x.$ Отсюда $x = 3$. *Ответ:* 3	$5^{\frac{1}{x}}\cdot 3^x=15.$ *Решение* ОДЗ: $x \neq 0$. Логарифмируя обе части уравнения по основанию 3, получаем равносильное уравнение $\frac{1}{x}\log_3 5+x=\log_3(3\cdot 5),$ $\log_3 5 + x^2 = x(1 + \log_3 5),$ $x^2 - (1 + \log_3 5)x +$ $+ \log_3 5 = 0,$ $x_{1,2}=\frac{1+\log_3 5\pm(1-\log_3 5)}{2}.$ *Ответ:* $x_1 = 1$; $x_2 = \log_3 5$	$(1+a^2)^{\sqrt{x}}=(1+a^2)^{3\sqrt{x}-2}.$ (*) *Решение* ОДЗ: $x \geqslant 0$, $a \in \mathbf{R}$. Рассмотрим два случая: $1 + a^2 = 1$ $(a = 0)$ и $1 + a^2 \neq 1$ $(a \neq 0)$ $(1 + a^2 > 1$ для всех $a)$. 1) **При $a = 0$** получаем уравнение $1^{\sqrt{x}}=1^{3\sqrt{x}-2}$, корни которого — все действительные числа из ОДЗ, т. е. $x \geqslant 0$, $(x \in [0; +\infty))$. 2) **При $a \neq 0$** $1 + a^2 \neq 1$, и тогда уравнение (*) равносильно уравнению $\sqrt{x}=3\sqrt{x}-2$. Отсюда $\sqrt{x}=1$; $x = 1$. *Ответ:* 1) при $a = 0$ $x \in [0; +\infty)$; 2) при $a \neq 0$ $x = 1$

Примеры решения простейших показательных неравенств

1. $3^{x-1} > 9.$	2. $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}>\frac{1}{9}.$	3. $5^{\frac{1}{x}}<-3.$	4. $5^{\frac{1}{x}}>-3.$
Решение $3^{x-1} > 3^2,$ так как $3 > 1$ (функция $y = 3^t$ — возрастающая), то $x - 1 > 2$, т. е. $x > 3$. *Ответ:* $(3; +\infty)$	*Решение* $\left(\frac{1}{3}\right)^{x-1}>\left(\frac{1}{3}\right)^2,$ так как основание степени $\frac{1}{3}<1$ (функция $y=\left(\frac{1}{3}\right)^t$ — убывающая), то $x - 1 < 2$, т. е. $x < 3$. *Ответ:* $(-\infty; 3)$	*Решение* Решений нет, так как $5^t > 0$ для всех t. *Ответ:* решений нет	*Решение* Так как $5^t > 0$ всегда, то x — любое действительное число из ОДЗ, т. е. $x \neq 0$. *Ответ:* $(-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$

Схема поиска решений показательных уравнений, не сводящихся непосредственно к простейшим

1. ***Избавляемся от числовых слагаемых в показателях степеней*** (используя опорные формулы справа налево). 2. Пробуем ***все степени*** (с переменной в показателе) ***привести к одному основанию*** и выполнить замену переменной	**Пример 1.** $4^{x+1} + 7\cdot 2^x - 2 = 0.$ *Решение* Избавившись от числового слагаемого в показателе степени, имеем $4^x\cdot 4 + 7\cdot 2^x - 2 = 0$. Приведя все степени к одному основанию, получаем $2^{2x}\cdot 4 + 7\cdot 2^x - 2 = 0$. **Замена** $2^x = t$ дает уравнение $4t^2 + 7t - 2 = 0$, которое имеет корни $t_1 = -2$, $t_2=\frac{1}{4}$. **Обратная замена** дает уравнение $2^x = -2$ (корней нет) или $2^x=\frac{1}{4}$, откуда $2^x = 2^{-2}$, т. е. $x = -2$. *Ответ*: $x = -2$
3. Если нельзя привести к одному основанию, то пробуем привести все степени ***к двум основаниям*** так, чтобы ***получить однородное уравнение***	Пример см. в табл. 46

4. В остальных случаях ***переносим все члены уравнения в одну сторону и пробуем разложить*** полученное выражение ***на множители или используем специальные приемы решения***, связанные с использованием свойств функций (см. также табл. 43)	**Пример 2.** $10^x + 4^{x+1} = 8^x + 4 \cdot 5^x$. *Решение* Учитывая, что $4^{x+1} = 4^x \cdot 4$, получаем $(10^x - 8^x) + (4^x \cdot 4 + 4 \cdot 5^x) = 0.$ Выносим за скобки в первом слагаемом 2^x, а во втором — -4. Получаем $2^x (5^x - 4^x) - 4 (5^x - 4^x) = 0$. Теперь выносим за скобки общий множитель $5^x - 4^x$. Имеем $(5^x - 4^x)(2^x - 4) = 0.$ Тогда $5^x - 4^x = 0$ или $2^x - 4 = 0$. Из второго уравнения получаем $2^x = 4$, $2^x = 2^2$, $x = 2$. Первое уравнение — однородное (табл. 46), и для его решения разделим обе части на $4x \neq 0$. Получаем $\left(\frac{5}{4}\right)^x - 1 = 0$, $\left(\frac{5}{4}\right)^x = 1$, т. е. $x = 0$. *Ответ*: $x = 2$ или $x = 0$ **Пример 3.** $3^x + 4^x = 7^x$ *Решение* Разделив обе части этого уравнения на $7^x \neq 0$, имеем равносильное уравнение $\left(\frac{3}{7}\right)^x + \left(\frac{4}{7}\right)^x = 1$. Функция $f(x) = \left(\frac{3}{7}\right)^x + \left(\frac{4}{7}\right)^x$ — убывающая (как сумма двух убывающих функций), поэтому уравнение $f(x) = 1$ имеет единственный корень $x = 1$ $(3^1 + 4^1 = 7^1,\ 7 = 7)$. *Ответ*: $x = 1$

Решение показательных неравенств, не сводящихся непосредственно к простейшим

I способ ***С помощью равносильных преобразований*** (по схеме решения показательных уравнений) ***данное неравенство сводим к неравенству известного типа*** (квадратному, дробному и т. п.), и после решения полученного неравенства приходим к простейшим показательным неравенствам	**Пример 4.** $4^{x+1} + 7 \cdot 2^x - 2 > 0$. *Решение* Выполнив те же преобразования, что и в примере 1, получаем $2^{2x} \cdot 4 + 7 \cdot 2^x - 2 > 0$. **Замена** $2^x = t$ дает неравенство $4t^2 + 7t - 2 > 0$, которое имеет решения $t < -2$ или $t > \frac{1}{4}$. **Обратная замена** дает неравенство: $2^x < -2$ (решений нет) или $2^x > \frac{1}{4}$, откуда $2^x > 2^{-2}$, т. е. $x > -2$. *Ответ*: $x \in (-2; +\infty)$
II способ Используем ***общий метод интервалов*** (табл. 40)	**Пример 5.** $3^x + 4^x > 7^x$. *Решение* Это неравенство равносильно неравенству $3^x + 4^x - 7^x > 0$, где $f(x) = 3^x + 4^x - 7^x$ — непрерывная в каждой точке своей области определения функция. 1. ОДЗ: $x \in \boldsymbol{R}$. 2. Нули функции: $f(x) = 0$ $(3^x + 4^x - 7^x = 0)$ при $x = 1$ (см. решение примера 3). 3. Разбиваем ОДЗ точкой 1 на два интервала и находим знак $f(x)$ в каждом интервале (см. рисунок).  *Ответ*: $x \in (-\infty; 1)$

Показательно-степенные уравнения

Определение. ***Показательно-степенными уравнениями*** обычно называют уравнения, содержащие выражения типа $f(x)^{g(x)}$, т. е. уравнения вида $f(x)^{g(x)} = f(x)^{\varphi(x)}$

Основные приемы решения

I. Для случая $f(x) > 0$

1. Если возможно, ***используем основное логарифмическое тождество*** в виде $a^{\log_a N} = N$ $(a > 0,\ a \neq 1,\ N > 0)$	**Пример 1.** $x^{\log_x (x+1)} = x^2 - 1.$ *Решение* $x^{\log_x (x+1)} = x^2 - 1 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x + 1 = x^2 - 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x^2 - x - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x > 0 \\ x \neq 1 \\ x_1 = -1 \text{ или } x_2 = 2. \end{cases} \Leftrightarrow x = 2$ *Ответ*: 2
2. Если возможно, ***логарифмируем обе части уравнения по числовому основанию или представляем все степени как степени с одним и тем же числовым основанием*** по формуле $U(x) = a^{\log_a U(x)}$, где $a > 0,\ a \neq 1,\ U(x) > 0$	**Пример 2.** $x^{2 \lg x + 1} = 100x$ *Решение* На ОДЗ ($x > 0$) обе части уравнения положительны, поэтому после логарифмирования по основанию 10 получаем уравнение, равносильное данному: $\lg (x^{2 \lg x + 1}) = \lg (100x).$ Отсюда $(2 \lg x + 1) \lg x = \lg 100 + \lg x.$ **Замена:** $\lg x = t$. Тогда $(2t + 1)t = 2 + t$; $t^2 = 1$; $t_1 = 1$, $t_2 = -1$. Откуда $\lg x = 1$ или $\lg x = -1$, т. е. $x = 10$, $x = 0{,}1$ (оба корня входят в ОДЗ). *Ответ*: 10; 0,1

II. Для случая, когда $f(x)$ — произвольное выражение

Две степени с одинаковыми основаниями могут быть равны в одном из четырех случаев: 1) $f(x) = -1$, и для корней этого уравнения $g(x)$ и $\varphi(x)$ — целые числа одинаковой четности; 2) $f(x) = 0$, и для корней этого уравнения $g(x) > 0$ и $\varphi(x) > 0$; 3) $f(x) = 1$, и для корней этого уравнения $g(x)$ и $\varphi(x)$ существуют; 4) $g(x) = \varphi(x)$, и для корней этого уравнения существуют $f(x)^{g(x)}$ и $f(x)^{\varphi(x)}$	**Пример 3.** $x^{2x+4} = x^{20}$ *Решение* Если считать основание степени x числом, то: 1) при $x = -1$ $(-1)^2 = (-1)^{20}$ — верное равенство; 2) при $x = 0$ $0^4 = 0^{20}$ верно; 3) при $x = 1$ $1^6 = 1^{20}$ верно; 4) при $2x + 4 = 20$, т. е. $x = 8$, $8^{20} = 8^{20}$ — верное равенство. *Ответ*: −1; 0; 1; 8. **Замечание.** Если считать основание степени x переменной, то функция $f(x) = x^{2x+4}$ считается определенной только при $x > 0$. С этой точки зрения данное уравнение имеет только корни 1 и 8 (т. е. ответ нельзя записать однозначно!)

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Определение. ***Логарифмическим уравнением (неравенством)*** называют уравнение (неравенство), в котором переменная находится под знаком логарифма

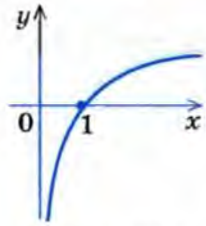
Опорные соотношения

Формулы

Избегайте (см. табл. 21) преобразований, сужающих ОДЗ исходного уравнения или неравенства!

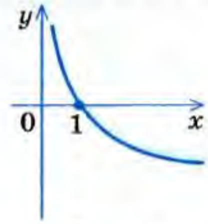
Графики функций $y = \log_a x$ $(a > 0,\ a \neq 1)$

$a > 1$



возрастает

$0 < a < 1$



убывает

Схема выполнения равносильных преобразований простейших логарифмических уравнений и неравенств

$\log_a f(x) = b$

$a > 0,\ a \neq 1$

$f(x) = a^b$

(Так как $a > 0$, то $a^b > 0$, и поэтому ОДЗ исходного уравнения учтена автоматически)

$\log_a f(x) = \log_a g(x)$

$a > 0,\ a \neq 1$

$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$

или

$\begin{cases} f(x) = g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$

$\log_a f(x) > \log_a g(x)$

$a > 0,\ a \neq 1$

$a > 1$: $\begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) > 0 \end{cases}$

Знак неравенства не меняется, и учитывается ОДЗ

$0 < a < 1$: $\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) > 0 \end{cases}$

Знак неравенства меняется, и учитывается ОДЗ

Примеры решения простейших логарифмических уравнений и неравенств

Уравнения

Пример 1

$\log_2 (x - 5) = 3.$

Решение

$x - 5 = 2^3,$

$x = 13.$

Ответ: 13

Пример 2

$\log_4 x = \log_4 (2x - 1).$

Решение

$\begin{cases} x = 2x - 1, \\ x > 0 \end{cases}$

(при этом ОДЗ исходного уравнения учтена).

Тогда $\begin{cases} x = 1, \\ x > 0, \end{cases}$

т. е. $x = 1$.

Ответ: 1

Неравенства

Пример 3

$\log_5(2x) > \log_5(x - 1).$

Решение

Так как $5 > 1$, то функция $y = \log_5 t$ — возрастающая и, учитывая ОДЗ, получаем $\begin{cases} 2x > x - 1, \\ x - 1 > 0. \end{cases}$

Отсюда $\begin{cases} x > -1, \\ x > 1 \end{cases}$,

т. е. $x > 1$.

Ответ: $(1;\ +\infty)$

Пример 4

$\log_{\frac{1}{2}}(2x) > \log_{\frac{1}{2}}(x - 1).$

Решение

Так как $0 < \frac{1}{2} < 1$, то функция $y = \log_{\frac{1}{2}} t$ — убывающая и, учитывая ОДЗ, получаем $\begin{cases} 2x < x - 1, \\ 2x > 0. \end{cases}$

Отсюда $\begin{cases} x < -1, \\ x > 0 \end{cases}$ — решений нет.

Ответ: решений нет

Схема решения более сложных логарифмических уравнений и неравенств

Решение логарифмических уравнений

- ***Использование уравнений-следствий***
  В конце — проверка подстановкой в исходное уравнение (см. табл. 40)
- ***Использование свойств соответствующих функций*** (см. табл. 43)
- ***Использование равносильных преобразований***
  (на ОДЗ исходного) (см. табл. 40 и 41)

Решение логарифмических неравенств

- ***Использование равносильных преобразований***
  (на ОДЗ исходного) (см. табл. 40 и 41)
- ***Использование метода интервалов***
  Для неравенства вида $f(x) \geq 0$ (см. табл. 40)

Направление преобразований

1. С помощью формул логарифмирования и потенцирования **приводим** уравнение или неравенство **к простейшему** (при этом учитываем ОДЗ исходного и следим за тем, чтобы не потерять решения при сужении ОДЗ).
2. После преобразований (если не удалось привести к простейшему) пробуем **ввести замену переменных**

Примеры решения некоторых логарифмических уравнений

Применение формул логарифмирования и потенцирования

Пример 1

$\log_2 (x + 1) + 0,5 \log_2 (x - 4)^2 = 1 + \log_2 3.$

Решение

Учитывая, что на ОДЗ ($x > -1$, $x \neq 4$)

$$\log_2 (x - 4)^2 = 2 \log_2 |x - 4|,$$

получаем следующие равносильные преобразования (на ОДЗ):

$$\log_2(x + 1) + \log_2|x - 4| - \log_2 3 = 1;$$

$$\log_2 \frac{(x+1)|x-4|}{3} = 1;$$

$$\frac{(x+1)|x-4|}{3} = 2^1;$$

$$(x + 1)|x - 4| = 6.$$

При

$$x - 4 \geqslant 0 \qquad (*)$$

получаем $(x + 1)(x - 4) = 6$;

$$x^2 - 3x - 10 = 0;$$

$x_1 = -2$ — не входит в ОДЗ,

$x_2 = 5$ — корень (входит в ОДЗ и удовлетворяет (*)).

При $x - 4 < 0$ получаем

$-(x + 1)(x - 4) = 6$; $x^2 - 3x + 2 = 0$;

$x_1 = 1$ — корень, $x_2 = 2$ — корень.

Ответ: 1; 2; 5

Замена переменной и переход к логарифмам с одним основанием (желательно числовым основанием, иначе возможна потеря корней)

Пример 2

$$\log_{2x} 2 + 2 \log_{4x} 8 = 4.$$

Решение

Перейдя к логарифмам с основанием 2, получаем равносильные уравнения

$$\frac{\log_2 2}{\log_2 (2x)} + 2\frac{\log_2 8}{\log_2 (4x)} = 4;$$

$$\frac{1}{\log_2 2 + \log_2 x} + 2\frac{3}{\log_2 4 + \log_2 x} = 4.$$

Замена $\log_2 = t$ дает уравнение

$$\frac{1}{1+t} + \frac{6}{2+t} = 4 \quad (t \neq -1,\ t \neq -2)$$

Тогда $4t^2 + 5t = 0$;

$$t_1 = 0;\ t_2 = -\frac{5}{4};$$

$$\log_2 x = 0;\ \log_2 x = -\frac{5}{4};$$

$$x = 2^0 = 1;\ x = 2^{-\frac{5}{4}} = \frac{1}{2\sqrt[4]{2}}.$$

Ответ: 1; $\frac{1}{2\sqrt[4]{2}}$

Использование свойств функций (см. табл. 43)

Пример 3

$\log_2 x + \log_3 x = 1 - x.$

Решение

Функция $f(x) = \log_2 x + \log_3 x$ возрастает на области определения ($x > 0$) как сумма двух возрастающих функций, а функция $g(x) = 1 - x$ убывает. Поэтому данное уравнение имеет единственный корень $x = 1$

($\log_2 1 + \log_3 1 = 1 - 1$; $0 = 0$).

Ответ: 1

СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Понятие системы и ее решения	Примеры систем
Если требуется найти все общие решения двух (или больше) уравнений (неравенств) с одной или несколькими переменными, то говорят, что нужно решить **систему** уравнений или неравенств. **Решением системы называют такое значение переменной** или такой упорядоченный набор значений переменных (если переменных несколько), **которые удовлетворяют одновременно всем уравнениям (неравенствам) системы.** Иначе говоря, решением системы двух или больше уравнений (неравенств) с n неизвестными называется такое упорядоченное множество из n чисел, при подстановке которых в систему вместо неизвестных все уравнения (неравенства) обращаются в верные числовые равенства (неравенства). **Решить систему** уравнений или неравенств — значит найти все ее решения или доказать, что решений нет. Если система не имеет решения, то ее называют **несовместной**	$\begin{cases} x-y=5, \\ 2x+y=1 \end{cases}$ — система двух уравнений с двумя переменными. Пара чисел $(2; -3)$, т. е. $\begin{cases} x=2, \\ y=-3, \end{cases}$ — решение системы $\begin{cases} x^2-y+z=0, \\ xy+xz+yz=19, \\ x+y-z=2 \end{cases}$ — система трех уравнений с тремя переменными. Тройка чисел $(1; 4; 3)$, т. е. $\begin{cases} x=1, \\ y=4, \\ z=3, \end{cases}$ — одно из решений системы $\begin{cases} x-y>5, \\ 2x+y<1, \\ x^2+y+6\leqslant 0 \end{cases}$ — система трех неравенств с двумя переменными. Пара чисел $(0; -6)$, т. е. $\begin{cases} x=0, \\ y=-6, \end{cases}$ — одно из решений системы
Замечание. Не следует путать понятие системы с **понятием совокупности** уравнений и неравенств (или их систем). **Решить совокупность** уравнений (неравенств) или их систем — **значит найти такие значения переменной** или такие наборы значений переменных (если переменных несколько), **каждый из которых является** *решением* **хотя бы одного из уравнений (неравенств)**, входящих в совокупность, и **при этом все остальные уравнения (неравенства)** совокупности **определены**, или доказать, что таких наборов чисел не существует	**Пример совокупности** Уравнение $\sqrt{2x+4}\,(x^2+2x-3)=0$ равносильно совокупности $\left[\begin{array}{ll} \sqrt{2x+4}=0, & (1) \\ x^2+2x-3=0 & (2) \end{array}\right. \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \sqrt{2x+4}=0, \\ \begin{cases} x^2+2x-3=0 \\ 2x+4\geqslant 0. \end{cases} \end{array}\right.$ Уравнение (1) имеет корень $x=-2$ (при этом уравнение (2) определено). Уравнение (2) имеет корни $x_1=1$ (при этом уравнение (1) определено) и $x_2=-3$ (при этом уравнение (1) не определено). *Решение* **совокупности** (а значит, и исходного уравнения): $x=-2$, $x=1$

Системы-следствия и равносильные системы

Следствия	Равносильные системы
Если каждое решение первой системы уравнений является решением второй системы, то вторая система называется **следствием** первой. При использовании систем-следствий возможно появление посторонних решений, поэтому проверка всех решений подстановкой их в исходную систему является составной частью решения системы	Две системы уравнений (или неравенств) называют **равносильными** на некотором множестве, если они на этом множестве имеют одинаковые решения. Иначе говоря, каждое решение первой системы на этом множестве является решением второй системы и, наоборот, каждое решение второй системы является решением первой. Как и для уравнений, **все равносильные преобразования систем выполняются на ОДЗ исходной системы.** ***ОДЗ (областью допустимых значений) системы называют общую область определения для всех функций, входящих в запись этой системы***

Схема решения систем уравнений и неравенств

- **Решение систем уравнений**
  - ***Использование систем-следствий*** В конце **проверка** подстановкой с исходную систему
  - ***Использование свойств соответствующих функций***
  - ***Графическое решение*** (для систем с двумя переменными)
  - ***Использование равносильных преобразований*** (на ОДЗ исходной системы)
- **Решение систем неравенств**
  - ***Использование равносильных преобразований*** (на ОДЗ исходной системы)
  - ***Графическое решение*** (для систем с двумя переменными)
  - Для систем неравенств с одной переменной ***использование метода интервалов*** для решения неравенств (см. табл. 40)

Основные утверждения о равносильности систем

Свойства равносильности систем	Пример
1. Если изменить порядок записи уравнений (или неравенств) данной системы, то получим систему, равносильную данной	Решить систему $\begin{cases} xy+y=3, \\ x^2-4y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-4y^2=0, \\ xy+y=3 \end{cases} \Leftrightarrow$
2. Если одно из уравнений (неравенств) системы заменить на равносильное ему уравнение (неравенство), то получим систему, равносильную данной	$\Leftrightarrow \begin{cases} (x-2y)(x+2y)=0, \\ xy+y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=0 \text{ или } x+2y=0, \\ xy+y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow$
3. Если первое уравнение некоторой системы, например $\begin{cases} f_1(x;y)=0, \\ f_2(x;y)=0, \end{cases}$ равносильно совокупности, состоящей из k уравнений $\varphi_1(x;\ y)=0,\ \varphi_2(x;\ y)=0,\ \dots,\ \varphi_k(x;\ y)=0,$ то данная система равносильна совокупности k систем $\begin{cases} \varphi_1(x;y)=0, \\ f_2(x;y)=0 \end{cases}$ или $\begin{cases} \varphi_2(x;y)=0, \\ f_2(x;y)=0 \end{cases}$ или ... $\begin{cases} \varphi_k(x;y)=0, \\ f_2(x;y)=0. \end{cases}$ Аналогично для систем неравенств	$\Leftrightarrow \begin{cases} x-2y=0, \\ xy+y-3=0, \end{cases}$ или $\begin{cases} x+2y=0, \\ xy+y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x=2y, \\ xy+y-3=0, \end{cases}$ или $\begin{cases} x=-2y, \\ xy+y-3=0 \end{cases} \Leftrightarrow$

Свойства равносильности систем	Пример (продолжение)
4. Если в системе уравнений из одного уравнения выразить одну переменную, например x, через другие и полученное выражение подставить вместо x во все остальные уравнения системы, то получим систему, равносильную данной	$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y, \\ 2y^2 + y - 3 = 0, \end{cases}$ или $\begin{cases} x = -2y, \\ -2y^2 + y - 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$ (решений нет) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y, \\ y = 1 \text{ или } y = -1{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow$ (по свойству 3) $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2y, \\ y = 1, \end{cases}$ или $\begin{cases} x = 2y, \\ y = -1{,}5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2, \\ y = 1, \end{cases}$ или $\begin{cases} x = -3, \\ y = -1{,}5. \end{cases}$ *Ответ*: (2; 1) (−3; −1,5)
5. Если первое уравнение системы заменить суммой первого уравнения, умноженного на число $\alpha \neq 0$, и второго уравнения, умноженного на число $\beta \neq 0$ (а все остальные уравнения оставить без изменения), то получим систему, равносильную данной	**Пример.** Решить систему $\begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ 5x - 4y = 1 \end{cases} \begin{vmatrix} \cdot 4 \\ \cdot 3 \end{vmatrix} \oplus \Big\vert \Leftrightarrow \begin{cases} 23x = 23, \\ 5x - 4y = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1, \\ y = 1 \end{cases}$ *Ответ*: (1; 1)

Графическое решение систем с двумя переменными

Выполняем равносильные преобразования системы таким образом, чтобы удобно было строить графики всех уравнений (неравенств), входящих в систему. Строим графики и находим координаты точек пересечения построенных линий (или областей) — эти координаты и являются решениями системы

Примеры

Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x^2 = 2 - y^2, \\ x^3 - y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 = 2, \\ y = x^3. \end{cases}$$

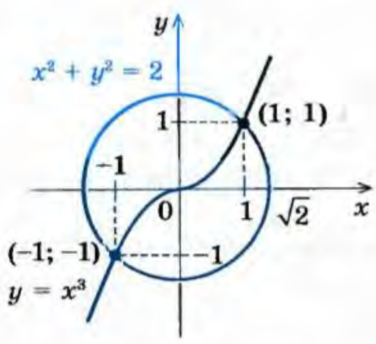


График первого уравнения — окружность радиуса $\sqrt{2}$ с центром в начале координат, а график второго — кубическая парабола $y = x^3$. Эти графики пересекаются в двух точках с координатами (−1; −1) и (1; 1).

Ответ: (−1; −1) и (1; 1) — решения системы уравнений

Изобразить на координатной плоскости решение системы неравенств

$$\begin{cases} y - x^2 \geqslant 0, \\ x + y \leqslant 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geqslant x^2, \\ y \leqslant 2 - x. \end{cases}$$

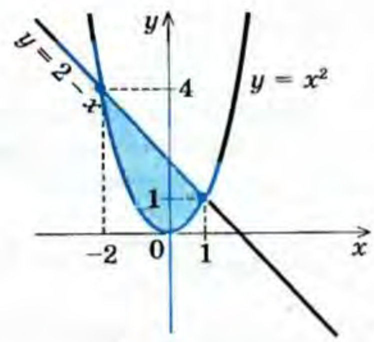
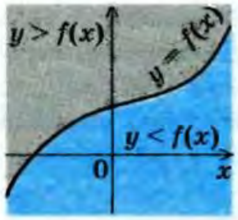
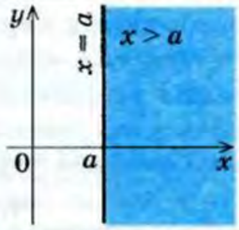
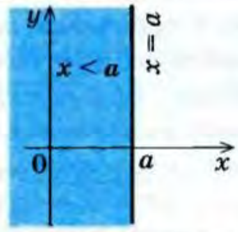
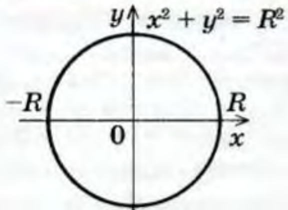
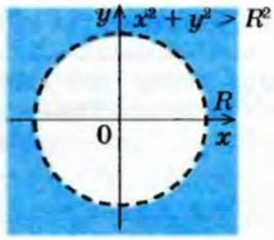
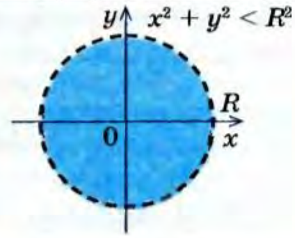
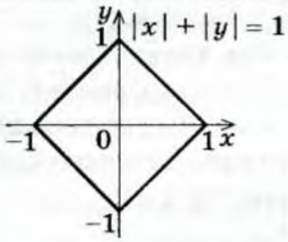
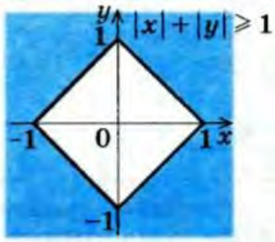
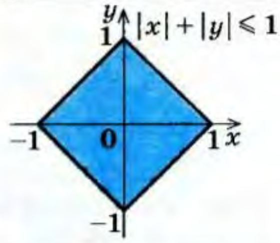
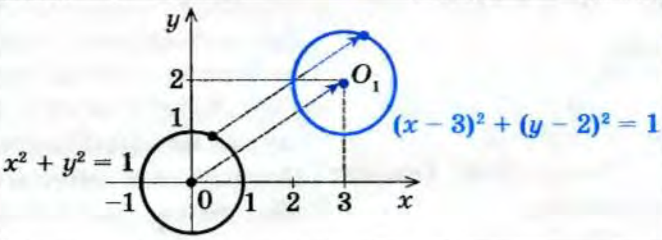
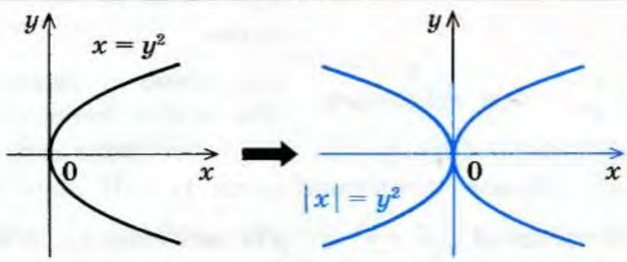
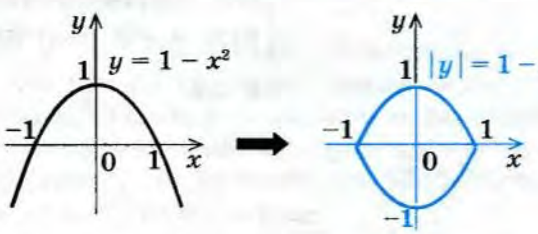


График первого неравенства — все точки координатной плоскости, лежащие выше параболы $y = x^2$ и на самой параболе. График второго неравенства — все точки, лежащие ниже прямой $y = 2 - x$ и на самой прямой. Пересечением этих графиков является закрашенная область (вместе с ее границей), содержащая все решения данной системы

ГРАФИКИ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ С ДВУМЯ ПЕРЕМЕННЫМИ

Определение	Графики некоторых уравнений и неравенств		
Графиком уравнения (неравенства) с двумя переменными x **и** y **называют множество всех точек координатной плоскости с координатами (x; y), где пара чисел (x; y) является решением соответствующего уравнения (неравенства)**			
			
			

Элементарные преобразования графика уравнения $F(x; y) = 0$

Формула зависимости	Пример	Преобразования
$F(x - a; y - b) = 0$		**Параллельный перенос графика уравнения $F(x; y) = 0$ на вектор $\bar{n}(a; b)$**
$F(\lvert x\rvert; y) = 0$		**Часть графика уравнения $F(x; y) = 0$ правее оси Oy (и на самой оси) остается без изменения, и эта же самая часть отображается симметрично относительно оси Oy**
$F(x; \lvert y\rvert) = 0$		**Часть графика уравнения $F(x; y) = 0$ выше оси Ox (и на самой оси) остается без изменения, и эта же самая часть отображается симметрично относительно оси Ox**

УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА С ПАРАМЕТРАМИ

Ориентир

Любое уравнение или неравенство с параметрами можно решать как обычное уравнение или неравенство до тех пор, пока все преобразования или рассуждения, необходимые для решения, можно выполнить однозначно. Если какое-то преобразование нельзя выполнить однозначно, то решение необходимо разбить на несколько случаев, чтобы в каждом из них ответ через параметры записывался однозначно

Пример

Решите уравнение $ax+1=\frac{4a+2}{x}$, где x — переменная

Решение	*Комментарий*
ОДЗ: $x \neq 0$	Выражения, стоящие в обеих частях уравнения, существуют тогда и только тогда, когда знаменатель дроби не равен нулю
$ax^2 + x - (4a + 2) = 0$	Умножим обе части данного уравнения на выражение x – общий знаменатель для обеих частей уравнения и получим целое уравнение, которое при условии $x \neq 0$ (то есть на ОДЗ заданного уравнения), равносильное заданному
1) При $a = 0$ получаем линейное уравнение $x - 2 = 0$. Отсюда $x = 2$ (входит в ОДЗ)	При $a = 0$ данное уравнение не является квадратным. Подставляем $a = 0$ в данное уравнение и решаем полученное уравнение (с учетом ОДЗ)
2) При $a \neq 0$ решаем квадратное уравнение: $D = 1 + 4a\,(4a + 2) = 16a^2 + 8a + 1 = (4a + 1)^2$; $x_{1,2}=\frac{-1\pm(4a+1)}{2a}$. Тогда $x_1 = 2$, $x_2=-\frac{2a+1}{a}$. Учитываем ОДЗ: $x_1 = 2$ — корень (входит в ОДЗ) при любых значениях a	При $a \neq 0$ имеем квадратное уравнение. Находим его дискриминант. Для вычисления корней уравнения целесообразно записать общую формулу для двух корней (в этом случае знак модуля можно не записывать). Прежде чем записывать ответ, следует обязательно выяснить, входят ли полученные значения корней в ОДЗ данного уравнения
Поскольку $x_2 = 0$ при $a=-\frac{1}{2}$, то при этом значении параметра $x_2 = 0$ не является корнем данного уравнения (однако его корнем является $x_1 = 2$). При $a\neq-\frac{1}{2}$ (и $a \neq 0$) значение $x_2=-\frac{2a+1}{a}$ является корнем уравнения	Для корня x_2 сначала нужно выяснить, при каких значениях параметра a его значение попадает в запрещенную область ($x = 0$). Потом можно дать ответ для найденного значения $a=-\frac{1}{2}$, и для всех других значений a (учитывая, что при $a = 0$ получили тот же ответ, что и при $a=-\frac{1}{2}$)

Ответ: 1) при $a = 0$ или $a=-\frac{1}{2}$ $x = 2$;

2) при $a \neq 0$ и $a\neq-\frac{1}{2}$ $x_1 = 2$, $x_2=-\frac{2a+1}{a}$

ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЕ ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

1. Исследование количества решений уравнений и их систем

Ориентир

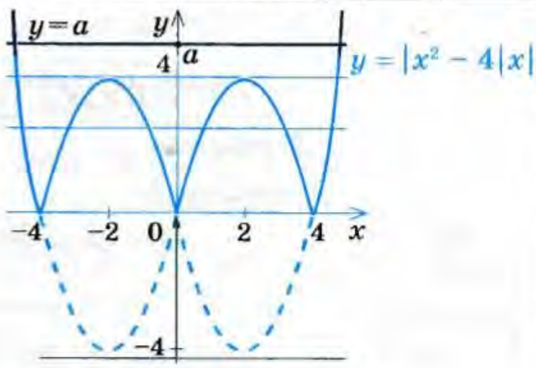
Если в задаче с параметрами речь идет о количестве решений уравнения (неравенства или системы), то для анализа данной ситуации часто удобно использовать графическую иллюстрацию решения

Особенности использования ориентира

Наиболее простым соответствующее исследование является в том случае, когда данное уравнение можно преобразовать к виду $f(x) = a$, поскольку график функции $y = a$ — это прямая, параллельная оси Ox (которая пересекает ось Oy в точке a). Отметим, что, заменяя данное уравнение на уравнение $f(x) = a$, нужно следить за равносильностью выполненных преобразований, чтобы полученное уравнение имело те же корни, что и данное, а следовательно, количество корней у них будет одинаковым. Чтобы определить, сколько корней имеет уравнение $f(x) = a$, достаточно определить, сколько точек пересечения имеет график функции $y = f(x)$ с прямой $y = a$ при различных значениях параметра a. (Для этого на соответствующем рисунке целесообразно изобразить все характерные положения прямой.)

Пример

Сколько корней имеет уравнение $|x^2 - 4|x|| = a$ в зависимости от значения параметра a?

План	*Решение*
1. Построим график функции $y = \|x^2 - 4\|x\|\|$ (учитывая, что $x^2 = \|x\|^2$), построение можно производить, например, по таким этапам (см. табл. 32): $x^2 - 4x \to \|x\|^2 - 4\|x\| \to \|x^2 - 4\|x\|\|$). 2. Строим график функции $y = a$. 3. Анализируем взаимное размещение полученных графиков: *количество корней уравнения $f(x) = a$ равно количеству точек пересечения графика функции $y = f(x)$ с прямой $y = a$.* 4. Записываем ответ	 *Ответ*: 1) при $a < 0$ нет корней; 2) при $a = 0$ три корня; 3) при $0 < a < 4$ шесть корней; 4) при $a = 4$ четыре корня; 5) при $a > 4$ два корня

2. Использование четности функций, которые входят в запись уравнения

Ориентир

Если в уравнении $f(x) = 0$ функция $f(x)$ является четной или нечетной, то вместе с каждым корнем α мы можем указать еще один корень этого уравнения $(-\alpha)$

Пример

Найдите все значения параметра a, при которых имеет единственный корень уравнение

$$a^2 \cos^2 x - x^2 - a = 0 \qquad (1)$$

Решение	*Комментарий*
Функция $f(x) = a^2 \cos^2 x - x^2 - a$ является четной ($D(f) = \boldsymbol{R}$, $f(-x) = f(x)$). Если $x = \alpha$ — корень уравнения (1), то $x = -\alpha$ тоже является корнем этого уравнения. Поэтому единственный корень у данного уравнения может быть только тогда, когда $\alpha = -\alpha$, то есть $\alpha = 0$.	Отмечаем, что в левой части данного уравнения стоит четная функция, и используем ориентир. Действительно, если $x = \alpha$ — корень уравнения $f(x) = 0$, то $f(\alpha) = 0$ — верное числовое равенство.

Таким образом, единственным корнем данного уравнения может быть только $x = 0$.
Если $x = 0$, то из уравнения (1) получаем $a^2 - a = 0$, то есть $a\,(a - 1) = 0$. Отсюда $a = 0$ или $a = 1$. При $a = 0$ уравнение (1) превращается в уравнение $x^2 = 0$, имеющее единственный корень $x = 0$. Таким образом, $a = 0$ удовлетворяет условию задачи.
При $a = 1$ имеем уравнение

$$\cos^2 x - x^2 - 1 = 0, \text{ то есть}$$
$$\cos^2 x = 1 + x^2. \qquad (2)$$

Поскольку $\cos^2 x \leqslant 1$, а $1 + x^2 \geqslant 1$, то уравнение (2) равносильно системе

$$\begin{cases} \cos x^2 = 1, \\ 1 + x^2 = 1. \end{cases}$$

Из второго уравнения системы получаем $x = 0$, что удовлетворяет и первому уравнению. Таким образом, эта система, а значит, и уравнение (2) имеет единственное решение $x = 0$. Следовательно, $a = 1$ также удовлетворяет условию задачи.
Ответ: $a = 0$, $a = 1$

Учитывая четность функции $f\,(x)$, имеем $f\,(-\alpha) = f\,(\alpha) = 0$. Таким образом, $x = -\alpha$ тоже корень уравнения $f\,(x) = 0$. Единственный корень у этого уравнения может быть только тогда, когда корни α и $-\alpha$ совпадают. Тогда $x = \alpha = -\alpha = 0$.
Выясним, существуют ли такие значения параметра a, при которых $x = 0$ является корнем уравнения (1). (Это $a = 0$ и $a = 1$.)
Поскольку значения $a = 0$ и $a = 1$ мы получили из условия, что $x = 0$ — корень уравнения (1), то необходимо проверить, действительно ли при этих значениях a данное уравнение будет иметь единственный корень.
Для решения уравнения (2) оценим его левую и правую части:

$$f\,(x) = \cos^2 x, \quad g\,(x) = 1 + x^2.$$

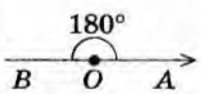
$$\underbrace{\cos^2 x}_{\boxed{0 \leqslant f(x) \leqslant 1}} = \underbrace{1 + x^2}_{\boxed{g(x) \geqslant 1}} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \cos x^2 = 1, \\ 1 + x^2 = 1 \end{cases}$$

Таблица 60

ТРИГОНОМЕТРИЯ. ИЗМЕРЕНИЕ УГЛОВ

В градусах

Определение



$1° = \dfrac{1}{180}$ часть развернутого угла

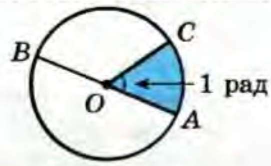
$\boxed{1° = 60'}$

$\boxed{1' = 60''}$

$1'$ — одна минута $\boxed{1' = \left(\dfrac{1}{60}\right)^{\circ}}$

$1''$ — одна секунда $\boxed{1'' = \left(\dfrac{1}{60}\right)'}$

В радианах



Определение

1 радиан — центральный угол, соответствующий дуге, длина которой равна радиусу окружности

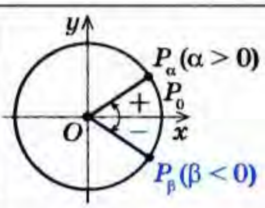
$\angle AOC = 1$ рад $\Leftrightarrow$ Длина $\cup\, \acute{AC} = OA = R$

$\boxed{\angle AOB = 180°}$ — $\angle AOB$ — развернутый — $\boxed{\angle AOB = \pi \text{ (рад)}}$

$1° = \dfrac{\pi}{180}$ рад

$1 \text{ рад} = \dfrac{180°}{\pi} \approx 57°$

Положительные и отрицательные углы в окружности



Рассмотрим окружность с центром в начале координат. Обозначим точку окружности на положительном направлении оси Ox через P_0 (P_0 — начальная точка, OP_0 — начальный радиус). Угол поворота радиуса OP_0 против часовой стрелки считается положительным, по часовой стрелке — отрицательным

$OP_0 \longrightarrow OP_\alpha$
повернули на угол α
против часовой стрелки
$\Leftrightarrow \boxed{\alpha > 0}$

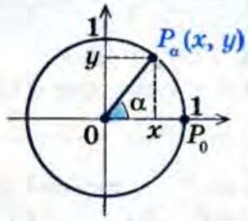
$OP_0 \longrightarrow OP_\beta$
повернули на угол β
по часовой стрелке
$\Leftrightarrow \boxed{\beta < 0}$

ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРОСТЕЙШИЕ СВОЙСТВА

Через единичную окружность ($R = 1$)

$\boxed{\sin\alpha = y}$ — ордината точки P_α

$\boxed{\cos\alpha = x}$ — абсцисса точки P_α



$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x} = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}}$

$\boxed{\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y} = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}}$

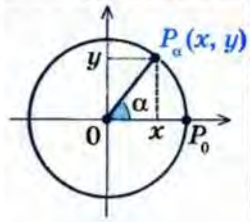
Через произвольную окружность (R — радиус окружности)

$\sin\alpha = \frac{y}{R}$

$\cos\alpha = \frac{x}{R}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{y}{x}$

$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x}{y}$



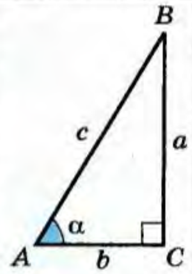
Через прямоугольный треугольник (для острых углов)

$\sin\alpha = \frac{a}{c}$

$\cos\alpha = \frac{b}{c}$

$\operatorname{tg}\alpha = \frac{a}{b}$

$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{b}{a}$



$\boxed{\sin\text{ (числа } \alpha) = \sin\text{ (угла в } \alpha \text{ рад)}}$

(аналогично и для других функций)

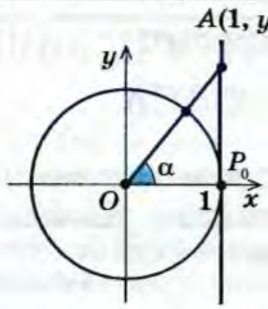
Наглядное представление тангенса и котангенса в единичной окружности

AP_0 — **ось тангенсов**

$AP_0 \parallel Oy$

По общему определению

$\boxed{\operatorname{tg}\alpha = \frac{y_A}{1} = y_A}$ — ордината соответствующей точки оси тангенсов

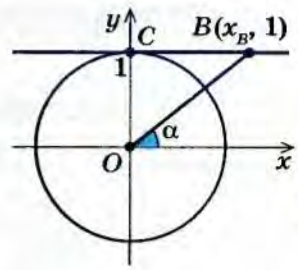


CB — **ось котангенсов**

$CB \parallel Ox$

По общему определению

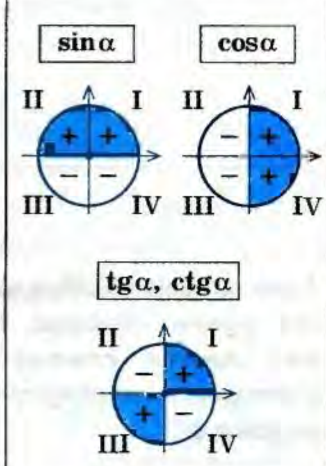
$\boxed{\operatorname{ctg}\alpha = \frac{x_B}{1} = x_B}$ — абсцисса соответствующей точки оси котангенсов



Значения тригонометрических функций некоторых углов

α									
	град	0°	30°	45°	60°	90°	180°	270°	360°
	рад	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
sin α		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	0	−1	0
cos α		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	−1	0	1
tg α		0	$\frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	—	0	—	0
ctg α		—	$\sqrt{3}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	0	—	0	—

Знаки тригонометрических функций



Некоторые свойства тригонометрических функций

Четность и нечетность	Периодичность
$\boxed{\cos(-\alpha) = \cos\alpha}$ — четная $\boxed{\begin{array}{c}\sin(-\alpha) = -\sin\alpha \\ \operatorname{tg}(-\alpha) = -\operatorname{tg}\alpha \\ \operatorname{ctg}(-\alpha) = -\operatorname{ctg}\alpha\end{array}}$ — нечетная	**$\sin x$, $\cos x$ — период $T = 2\pi$** Тогда $\sin(x + 2\pi k) = \sin x$, $\cos(x + 2\pi k) = \cos x$ $(k \in Z)$ **$\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ — период $T = \pi$** Тогда $\operatorname{tg}(x + \pi k) = \operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg}(x + \pi k) = \operatorname{ctg} x$ $(k \in Z)$ ***Если T — период функции, то $\pm 2T, \pm 3T, ..., \pm kT$ — также периоды этой функции ($k \in N$)*** Например, $T = 2\pi$ — общий период для всех функций: $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$

Таблица 62

СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ФУНКЦИЯМИ ОДНОГО АРГУМЕНТА

$\boxed{\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1}$ — основное тригонометрическое тождество

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$$

$$\operatorname{ctg}\alpha = \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha}, \quad \alpha \neq \pi k,\ k \in Z$$

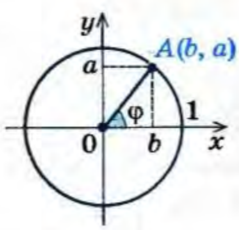
$$\operatorname{tg}\alpha \cdot \operatorname{ctg}\alpha = 1, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2}k,\ k \in Z$$

$$1 + \operatorname{tg}^2\alpha = \frac{1}{\cos^2\alpha}, \quad \alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$$

$$1 + \operatorname{ctg}^2\alpha = \frac{1}{\sin^2\alpha}, \quad \alpha \neq \pi k,\ k \in Z$$

Полезное свойство

Если сумма квадратов двух чисел равна единице, то одно из них можно считать синусом, а второе — косинусом некоторого угла φ



Пусть $a^2 + b^2 = 1$.

Возьмем точку $A\ (b, a)$.

Тогда $OA = \sqrt{b^2 + a^2} = 1$,

поэтому $a = \sin\varphi$, $b = \cos\varphi$

ФОРМУЛЫ ПРИВЕДЕНИЯ

Это формулы приведения тригонометрических функций от аргументов типа $k\pi \pm \alpha$ и $(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}\pm\alpha$ $(k \in \mathbb{Z})$ к тригонометрическим функциям от аргумента α

Основные формулы приведения

x	$\pi+\alpha$	$\pi-\alpha$	$2\pi-\alpha$	$\frac{\pi}{2}+\alpha$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\frac{3\pi}{2}+\alpha$	$\frac{3\pi}{2}-\alpha$
$\sin x$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$	$\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$
$\cos x$	$-\cos\alpha$	$-\cos\alpha$	$\cos\alpha$	$-\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$\sin\alpha$	$-\sin\alpha$
$\mathrm{tg}\, x$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$
$\mathrm{ctg}\, x$	$\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{ctg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$	$-\mathrm{tg}\,\alpha$	$\mathrm{tg}\,\alpha$

Мнемоническое правило

1. Если к числу α прибавляется число $k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$ (то есть число, которое изображается на горизонтальном диаметре единичной окружности), то функция не меняется. Если же прибавляется число $(2k+1)\cdot\frac{\pi}{2}$ (которое изображается на вертикальном диаметре), то функция меняется на соответственную (синус на косинус, косинус на синус, тангенс на котангенс, котангенс на тангенс).
2. Знак полученного выражения определяется знаком исходного выражения, если условно считать угол α острым

Пример

I способ. $\mathrm{tg}\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)=-\mathrm{ctg}\,\alpha$ — функция меняется на ctg, так как угол $\frac{7\pi}{2}$ изображается на вертикальном диаметре (внизу) единичной окружности. Если угол α — острый, то угол $\frac{7\pi}{2}+\alpha$ находится в IV координатной четверти, где значения тангенса отрицательны. Поэтому $\mathrm{ctg}\,\alpha$ взят со знаком «−».

II способ.

$$\mathrm{tg}\left(\frac{7\pi}{2}+\alpha\right)=\mathrm{tg}\left(\underset{\substack{\uparrow\\ \text{период}}}{3\pi}+\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)=-\mathrm{ctg}\,\alpha$$

Формулы дополнительных углов

Два угла называют **дополнительными**, если их сумма равна $\frac{\pi}{2}$ (90°)

$$\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \qquad \cos\alpha=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \qquad \mathrm{tg}\,\alpha=\mathrm{ctg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right) \qquad \mathrm{ctg}\,\alpha=\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

ФОРМУЛЫ СЛОЖЕНИЯ И СЛЕДСТВИЯ ИЗ НИХ

$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$

$\sin(\alpha-\beta)=\sin\alpha\cos\beta-\cos\alpha\sin\beta$

$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$

$$\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$
$$\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$$

$$\operatorname{tg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta}{1+\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta},$$
$$\alpha,\ \beta,\ \alpha-\beta\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha+\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta-1}{\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta},$$
$$\alpha,\ \beta,\ \alpha+\beta\neq\pi k,\ k\in Z$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha-\beta)=\frac{\operatorname{ctg}\alpha\operatorname{ctg}\beta+1}{\operatorname{ctg}\beta-\operatorname{ctg}\alpha},$$
$$\alpha,\ \beta,\ \alpha-\beta\neq\pi k,\ k\in Z$$

Формулы двойных и тройных углов (аргументов)

$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha$

$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha},$$
$$2\alpha,\ \alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$$

$$\operatorname{ctg}2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}^2\alpha-1}{2\operatorname{ctg}\alpha},$$
$$2\alpha,\ \alpha\neq\pi k,\ k\in Z$$

$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha$

$\cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha$

$$\operatorname{tg}3\alpha=\frac{3\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}^3\alpha}{1-3\operatorname{tg}^2\alpha},$$
$$\alpha\neq\frac{\pi}{6}(2k+1),\ k\in Z$$

$$\operatorname{ctg}3\alpha=\frac{3\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{ctg}^3\alpha}{1-3\operatorname{ctg}^2\alpha},$$
$$\alpha\neq\frac{\pi k}{3},\ k\in Z$$

Формулы понижения степени

$$\sin^2\alpha=\frac{1-\cos 2\alpha}{2}$$

$$\cos^2\alpha=\frac{1+\cos 2\alpha}{2}$$

Формулы половинного аргумента

(Знак перед корнем выбирается в зависимости от знака тригонометрической функции, стоящей в левой части равенства.)

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1+\cos\alpha},\ \alpha\neq\pi+2\pi k,\ k\in Z$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{1-\cos\alpha}}=\frac{\sin\alpha}{1-\cos\alpha},\ \alpha\neq 2\pi k,\ k\in Z$$

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \alpha\neq\pi k,\ k\in Z$$

$$\operatorname{ctg}\frac{\alpha}{2}=\frac{1+\cos\alpha}{\sin\alpha},\ \alpha\neq\pi k,\ k\in Z$$

Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного аргумента	
$\sin\alpha = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$, $\alpha \neq \pi + 2\pi k,\ k \in Z$	$\cos\alpha = \dfrac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$, $\alpha \neq \pi + 2\pi k,\ k \in Z$
$\mathrm{tg}\,\alpha = \dfrac{2\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}$, $\alpha \neq \pi + 2\pi k,\ k \in Z$, $\alpha \neq \frac{\pi}{2} + \pi n,\ n \in Z$	$\mathrm{ctg}\,\alpha = \dfrac{1-\mathrm{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\,\mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2}}$, $\alpha \neq \pi k,\ k \in Z$

Таблица 65

ПРЕОБРАЗОВАНИЕ СУММЫ (РАЗНОСТИ) ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПРОИЗВЕДЕНИЕ

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\sin\alpha - \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}$$

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

$$\cos\alpha - \cos\beta = -2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2} = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha}{2}$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha + \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\quad \alpha,\ \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$$

$$\mathrm{tg}\,\alpha - \mathrm{tg}\,\beta = \frac{\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha\cos\beta},\quad \alpha,\ \beta \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$$

$$\mathrm{ctg}\,\alpha + \mathrm{ctg}\,\beta = \frac{\sin(\alpha+\beta)}{\sin\alpha\sin\beta},\quad \alpha,\ \beta \neq \pi k,\ k \in Z$$

$$\mathrm{ctg}\,\alpha - \mathrm{ctg}\,\beta = \frac{\sin(\beta-\alpha)}{\sin\alpha\sin\beta},\quad \alpha,\ \beta \neq \pi k,\ k \in Z$$

$$1 + \cos\alpha = 2\cos^2\frac{\alpha}{2}$$

$$1 - \cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$$

Введение вспомогательного аргумента

$$a\sin\alpha + b\cos\alpha = \sqrt{a^2+b^2}\cdot\sin(\alpha+\varphi),$$

где φ определяется из условий $\begin{cases} \sin\varphi = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}, \\ \cos\varphi = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \end{cases}$

$$\sin\alpha + \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\sin\alpha - \cos\alpha = \sqrt{2}\sin\left(\alpha - \frac{\pi}{4}\right)$$

Преобразование произведения тригонометрических функций в сумму

$$\sin\alpha\sin\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta))$$

$$\cos\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta))$$

$$\sin\alpha\cos\beta = \frac{1}{2}(\sin(\alpha-\beta) + \sin(\alpha+\beta))$$

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ФОРМУЛ, СУЖАЮЩИХ ОДЗ, ПРИ РЕШЕНИИ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ	
Если для решения уравнений или неравенств приходится выполнять преобразования, сужающие ОДЗ исходного уравнения или неравенства, то те значения, на которые сужается ОДЗ, надо рассматривать отдельно (см. также табл. 42)	
Используемая формула (слева направо)	**Какие значения надо проверить отдельно, если они входят в ОДЗ исходного**
$\operatorname{ctg} x=\frac{1}{\operatorname{tg} x}$ $\operatorname{tg}(x\pm\alpha)=\frac{\operatorname{tg} x\pm\operatorname{tg}\alpha}{1\mp\operatorname{tg} x\cdot\operatorname{tg}\alpha}$ $\left(\alpha\neq\frac{\pi}{2}+\pi n,\ n\in Z\right)$ $\operatorname{tg} 2x=\frac{2\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$	$x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$
$\operatorname{tg} x=\frac{1}{\operatorname{ctg} x}$ $\operatorname{ctg}(x\pm\alpha)=\frac{\operatorname{ctg} x\cdot\operatorname{ctg}\alpha\mp 1}{\operatorname{ctg}\alpha\pm\operatorname{ctg} x}$ $(\alpha\neq\pi n,\ n\in Z)$ $\operatorname{ctg} 2x=\frac{\operatorname{ctg}^2 x+1}{2\operatorname{ctg} x}$	$x=\pi k,\ k\in Z$
$\operatorname{ctg}\frac{x}{2}=\frac{1+\cos x}{\sin x}$	$x=\pi+2\pi k,\ k\in Z$
$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{\sin x}$	$x=2\pi k,\ k\in Z$
$\sin x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$ $\cos x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$ $\operatorname{tg} x=\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}$ $\operatorname{ctg} x=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}$	$x=\pi+2\pi k,\ k\in Z$
Пример использования формул, сужающих ОДЗ	**Комментарий**
Решить уравнение $\operatorname{ctg}^2 x-\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=1$ (1)	Если воспользоваться первыми двумя формулами данной таблицы, то мы приведем все тригонометрические выражения в этом уравнении и к одному аргументу, и к одной функции — $\operatorname{tg} x$ (см. также табл. 70). Однако при использовании указанных формул происходит сужение ОДЗ на значения $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in Z$. В результате этого можно потерять корни уравнения (если числа такого вида входят в ОДЗ исходного уравнения и являются его корнями). Чтобы избежать потери корней, разобьем решение на две части

Решение 1. Если $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$, то из данного уравнения получаем $\mathrm{ctg}^2\left(\frac{\pi}{2}+\pi k\right)-\mathrm{tg}\left(\frac{\pi}{2}+\pi k+\frac{\pi}{4}\right)=1$, т. е. $0^2-(-1)=1$ — верное равенство. Следовательно, $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$ — корни уравнения (1)	Подставляем те значения, на которые сужается ОДЗ, в уравнение (1). При вычислениях учитываем периодичность функции (табл. 61) и формулы приведения (табл. 63)
2. Если $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$, получаем $\frac{1}{\mathrm{tg}^2 x}-\frac{\mathrm{tg}\,x+1}{1-\mathrm{tg}\,x}=1.$ (2) **Замена:** $\mathrm{tg}\,x=t$ дает уравнение $\frac{1}{t^2}-\frac{t+1}{1-t}=1$, которое при $t\neq0$ и $t\neq1$ равносильно уравнению $2t^2+t-1=0$. Отсюда $t_1=-1,\ t_2=\frac{1}{2}$. **Обратная замена** дает $\mathrm{tg}\,x=-1$ или $\mathrm{tg}\,x=\frac{1}{2}$, т. е. $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$, или $x=\mathrm{arctg}\frac{1}{2}+\pi m,\ m\in\boldsymbol{Z}$	При $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$ (из ОДЗ уравнения (1)) использование формул $\mathrm{ctg}\,x=\frac{1}{\mathrm{tg}\,x}$ и $\mathrm{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\mathrm{tg}\,x+\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}}{1-\mathrm{tg}\,x\,\mathrm{tg}\frac{\pi}{4}}=\frac{\mathrm{tg}\,x+1}{1-\mathrm{tg}\,x}$ приводит к уравнению, равносильному данному (на той части ОДЗ, где $x\neq\frac{\pi}{2}+\pi k$), т. к. эти формулы сохраняют верное равенство как при переходе от равенства (1) к равенству (2), так и при обратном переходе от равенства (2) к равенству (1) (см. также табл. 41). Замена переменной (и обратная замена) также приводит к уравнению, равносильному данному (на указанной части ОДЗ исходного уравнения). Заметим, что ОДЗ уравнения (2) отличается от ОДЗ уравнения (1) только тем, что в нее не входят значения $x=\frac{\pi}{2}+\pi k$, которые входят в ОДЗ уравнения (1). Поскольку эти «нехорошие» значения мы учли в процессе решения, то ОДЗ уравнения (1) можно в явном виде не фиксировать (как в приведенном решении)
Ответ: 1) $x=\frac{\pi}{2}+\pi k,\ k\in\boldsymbol{Z}$; 2) $x=-\frac{\pi}{4}+\pi n,\ n\in\boldsymbol{Z}$; 3) $x=\mathrm{arctg}\frac{1}{2}+\pi m,\ m\in\boldsymbol{Z}$	В ответе записываем все корни, которые были получены в первой и второй частях решения

ФУНКЦИИ $y = \sin x$, $y = \cos x$ И ИХ ГРАФИКИ

$y = \sin x$

(определение см. в табл. 61)

1. ***Область определения***

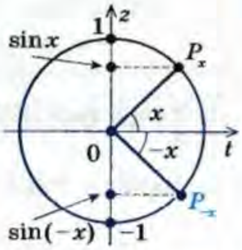
x — любое число

$\boxed{D(\sin x) = R}$

2. ***Множество значений***

отрезок $[-1; 1]$

$\boxed{E(\sin x) = [-1; 1]}$



3. ***Функция нечетная***

$\boxed{\sin(-x) = -\sin x}$, т. е. график симметричен относительно начала координат

$y = \cos x$

(определение см. в табл. 61)

1. ***Область определения***

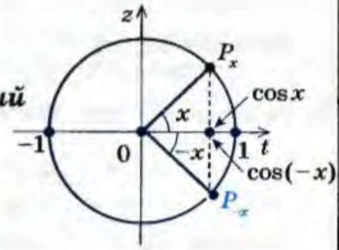
x — любое число

$\boxed{D(\cos x) = R}$

2. ***Множество значений***

отрезок $[-1; 1]$

$\boxed{E(\cos x) = [-1; 1]}$



3. ***Функция четная***

$\boxed{\cos(-x) = \cos x}$, т. е. график симметричен относительно оси Oy

---

4. ***Функция периодическая*** с наименьшим положительным периодом $\boxed{T = 2\pi}$

$\boxed{\sin(x + 2\pi) = \sin x}$ $\qquad$ $\boxed{\cos(x + 2\pi) = \cos x}$

Поэтому форма графика повторяется через 2π (его можно получить из любой части графика на интервале длиной 2π с помощью параллельного переноса этой части вдоль оси Ox на $2\pi k$, $k \in Z$ (см. ниже график)

5. ***Точки пересечения с осями координат***

$y = \sin x$:

$\boxed{Oy}$ $\begin{cases} x = 0, \\ y = \sin 0 = 0 \end{cases}$ — график проходит через начало координат

$\boxed{Ox}$ $\begin{cases} y = 0 \ (\sin x = 0 \text{ при } x = \pi k), \\ x = \pi k, k \in Z \end{cases}$

$y = \cos x$:

$\boxed{Oy}$ $\begin{cases} x = 0, \\ y = \cos 0 = 1 \end{cases}$

$\boxed{Ox}$ $\begin{cases} y = 0 \left(\cos x = 0 \text{ при } x = \frac{\pi}{2} + \pi k\right), \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \end{cases}$

6. ***Промежутки знакопостоянства***

$\sin x > 0$ при $x \in (2\pi k, \pi + 2\pi k)$, $k \in Z$

$\sin x < 0$ при $x \in (\pi + 2\pi k, 2\pi + 2\pi k)$, $k \in Z$

$\cos x > 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$

$\cos x < 0$ при $x \in \left(\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right)$, $k \in Z$

7. ***Функция непрерывна и имеет производную для любого значения аргумента***

$\boxed{(\sin x)' = \cos x}$ $\qquad$ $\boxed{(\cos x)' = -\sin x}$

8. ***Промежутки монотонности***

Функция $\sin x$ **возрастает** в каждом из промежутков $\left[-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$, и **убывает** в каждом из промежутков $\left[\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{3\pi}{2} + 2\pi k\right]$, $k \in Z$

Функция $\cos x$ **возрастает** в каждом из промежутков $[-\pi + 2\pi k; 2\pi k]$, $k \in Z$, и **убывает** в каждом из промежутков $[2\pi k; \pi + 2\pi k]$, $k \in Z$

9. *Экстремумы*

Функция принимает наибольшее значение 1 $y_{\max} = 1$ в точках

$y = \sin x \quad x_{\max} = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$

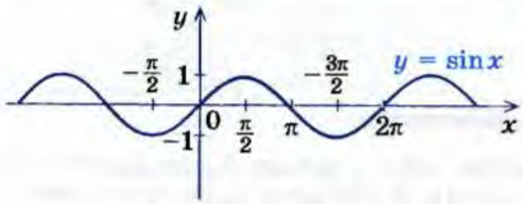
$y = \cos x \quad x_{\max} = 2\pi k,\ k \in Z$

Функция принимает наименьшее значение −1 $y_{\min} = -1$ в точках

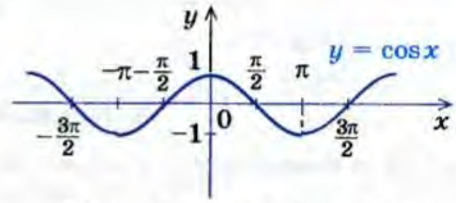
$y = \sin x \quad x_{\min} = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$

$y = \cos x \quad x_{\min} = \pi + 2\pi k,\ k \in Z$

10. *График*



Кривая — **синусоида**



Кривая — **косинусоида**

Поскольку $\cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right)$ (табл. 63), то график функции $y = \cos x$ можно получить параллельным переносом синусоиды $y = \sin x$ вдоль оси Ox на $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$ (табл. 32)

Таблица 68

ФУНКЦИИ $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$ И ИХ ГРАФИКИ

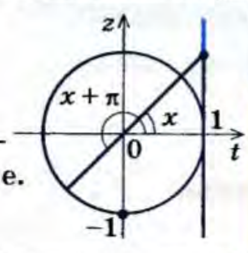
$y = \operatorname{tg} x$ (определение см. в табл. 61)

1. ***Область определения***

$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$

2. ***Множество значений*** — вся числовая прямая, т. е.

$E(\operatorname{tg} x) = R$



$y = \operatorname{ctg} x$ (определение см. в табл. 61)

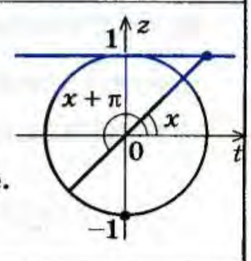
1. ***Область определения***

x — любое число

$x \neq \pi k,\ k \in Z$

2. ***Множество значений*** вся числовая прямая, т. е.

$E(\operatorname{ctg} x) = R$



3. *Функция нечетная*

$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x$

$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x$

(т. е. график симметричен относительно начала координат)

4. *Функция периодическая* с наименьшим положительным периодом $T = \pi$

$\operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg} x$

$\operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg} x$

Поэтому форма графика повторяется через π (его можно получить из любой части графика на интервале длиной π с помощью параллельного переноса этой части вдоль оси Ox на πк, $k \in Z$ (см. ниже график)

5. *Точки пересечения с осями координат*

Oy $\begin{cases} x = 0, \\ y = \operatorname{tg} 0 = 0 \end{cases}$ — график проходит через начало координат

Ox $\begin{cases} y = 0\ (\operatorname{tg} x = 0 \text{ при } x = \pi k), \\ x = \pi k, k \in Z \end{cases}$

Пересечения с осью Oy нет ($x \neq 0$ по области определения)

Ox $\begin{cases} y = 0\left(\operatorname{ctg} x = 0 \text{ при } x = \frac{\pi}{2} + \pi k\right), \\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in Z \end{cases}$

6. *Промежутки знакопостоянства*

$\operatorname{tg} x > 0$ при $x \in \left(\pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$

$\operatorname{tg} x < 0$ при $x \in \left(-\frac{\pi}{2} + \pi k, \pi k\right)$, $k \in Z$

$\operatorname{ctg} x > 0$ при $x \in \left(\pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$

$\operatorname{ctg} x < 0$ при $x \in \left(\frac{\pi}{2} + \pi k, \pi + \pi k\right)$, $k \in Z$

7. *Функция непрерывна в каждой точке своей области определения*

(и на любом интервале, входящем в область определения) и *имеет производную* при любом значении аргумента из области определения функции

$$\boxed{(\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}}$$

$$\boxed{(\operatorname{ctg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}}$$

8. *Промежутки монотонности*

Функция tg x возрастает в каждом из промежутков $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi k, \frac{\pi}{2} + \pi k\right)$, $k \in Z$.

Функция ctg x убывает в каждом из промежутков (πk; $\pi + 2\pi k$), $k \in Z$.

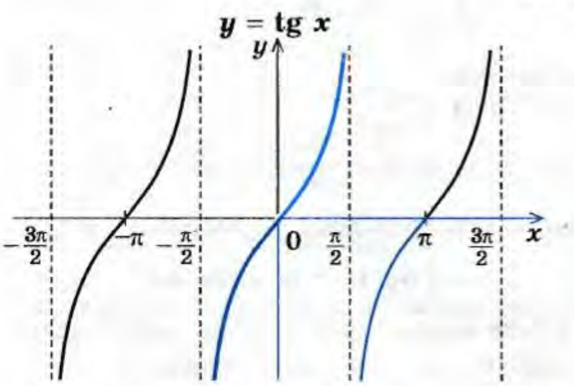
При этом функция принимает все значения от $-\infty$ до $+\infty$, поэтому наибольшего и наименьшего значений не имеет

9. *Асимптоты* (см. табл. 31)

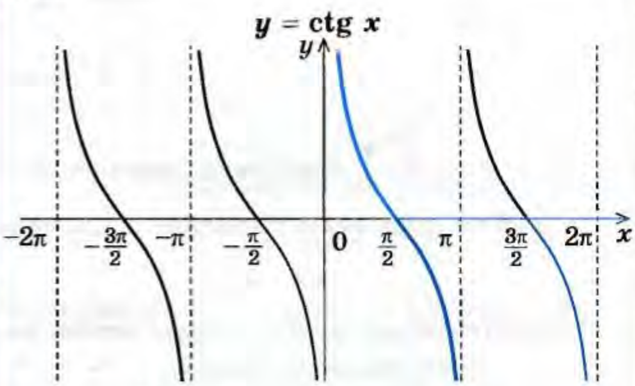
1) при $x \to -\frac{\pi}{2}$ справа
   $y = \operatorname{tg} x \to -\infty$;
2) при $x \to \frac{\pi}{2}$ слева
   $y = \operatorname{tg} x \to +\infty$, т. е. прямые $x = -\frac{\pi}{2}$ и $x = \frac{\pi}{2}$ — **вертикальные асимптоты,** а в силу периодичности функции также и прямые $x = -\frac{\pi}{2} + \pi k$, $k \in Z$

1) При $x \to 0$ справа
   $y = \operatorname{ctg} x \to +\infty$;
2) при $x \to \pi$ слева
   $y = \operatorname{ctg} x \to -\infty$, т. е. прямые $x = 0$ и $x = \pi$ — **вертикальнве асимптоты,** а в силу периодичности функции также и прямые $x = \pi k$, $k \in Z$

10. *График*



Кривая — **тангенсоида**



Кривая — **котангенсоида**

Поскольку $\operatorname{ctg} x = -\operatorname{tg}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)$ (табл. 63), то график функции $y = \operatorname{ctg} x$ — тангенсоида ($y = \operatorname{tg} x$), симметрично отображенная относительно оси Ox и параллельно перенесенная вдоль оси Oy на $\frac{\pi}{2}$ (табл. 32)

ОБРАТНЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

Определение выражений arcsin a, arccos a, arctg a, arcctg a

arcsin a ($|a| \leqslant 1$)

Арксинусом числа а называется угол (число) из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, синус которого равен a.

$$\boxed{\arcsin a = \varphi} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \\ \sin\varphi = a \end{matrix}}$$

Примеры. $\arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}$; $\arcsin(-1) = -\frac{\pi}{2}$

arccos a ($|a| \leqslant 1$)

Арккосинусом числа а называется угол (число) из промежутка $[0; \pi]$, косинус которого равен a.

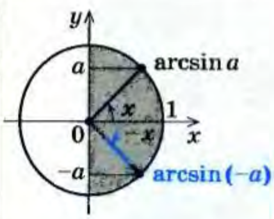
$$\boxed{\arccos a = \varphi} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} \varphi \in [0; \pi] \\ \cos\varphi = a \end{matrix}}$$

Примеры. $\arccos\frac{1}{2} = \frac{\pi}{3}$; $\arccos(-1) = \pi$

Из определения получаем формулы

$\boxed{\sin(\arcsin a) = a}$

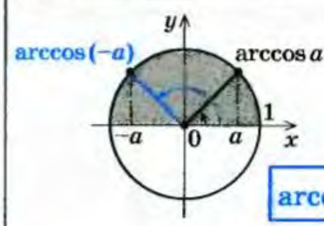
$\boxed{\arcsin(\sin\varphi) = \varphi, \text{ если } \varphi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]}$



$\boxed{\arcsin(-a) = -\arcsin a}$

$\boxed{\cos(\arccos a) = a}$

$\boxed{\arccos(\cos\varphi) = \varphi, \text{ если } \varphi \in [0; \pi]}$



$\boxed{\arccos(-a) = \pi - \arccos a}$

arctg a

Арктангенсом числа а называется угол (число) из промежутка $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, тангенс которого равен a.

$$\boxed{\operatorname{arctg} a = \varphi} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} \varphi \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \\ \operatorname{tg}\varphi = a \end{matrix}}$$

Примеры. $\operatorname{arctg} 1 = \frac{\pi}{4}$; $\operatorname{arctg}\left(-\sqrt{3}\right) = -\frac{\pi}{3}$

arcctg a

Арккотангенсом числа а называется угол (число) из промежутка $(0; \pi)$, котангенс которого равен a.

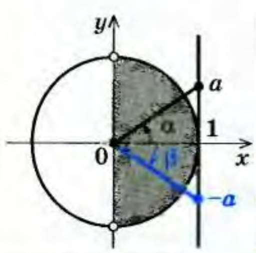
$$\boxed{\operatorname{arcctg} a = \varphi} \Leftrightarrow \boxed{\begin{matrix} \varphi \in (0; \pi) \\ \operatorname{ctg}\varphi = a \end{matrix}}$$

Примеры. $\operatorname{arcctg}\sqrt{3} = \frac{\pi}{6}$; $\operatorname{arcctg}(-1) = \frac{3\pi}{4}$

Из определения получаем формулы

$\boxed{\operatorname{tg}(\operatorname{arctg} a) = a}$

$\boxed{\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}\alpha) = \alpha, \text{ если } \alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)}$

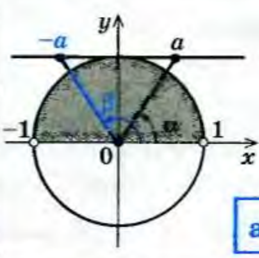


$\alpha = \operatorname{arctg} a$,
$\beta = \operatorname{arctg}(-a)$,
$\beta = -\alpha$, т. е.

$\boxed{\operatorname{arctg}(-a) = -\operatorname{arctg} a}$

$\boxed{\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} a) = a}$

$\boxed{\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}\alpha) = \alpha, \text{ если } \alpha \in (0; \pi)}$



$\alpha = \operatorname{arcctg} a$,
$\beta = \operatorname{arcctg}(-a)$,
$\beta = \pi - \alpha$, т. е.

$\boxed{\operatorname{arcctg}(-a) = \pi - \operatorname{arcctg} a}$

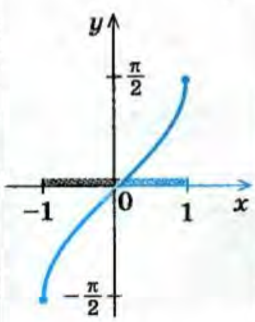
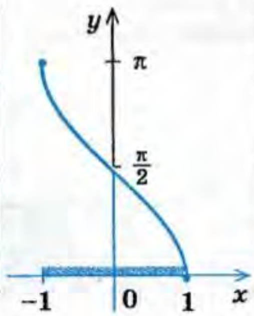
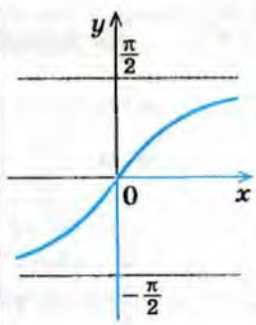
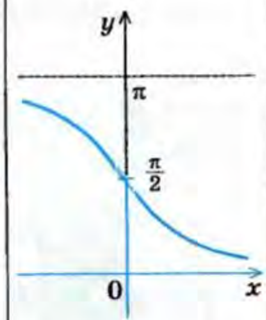
Простейшие соотношения между обратными тригонометрическими функциями

$\boxed{\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2} \; (|a| \leqslant 1)}$

$\boxed{\operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a = \frac{\pi}{2}}$

Графики обратных тригонометрических функций

Если функция возрастает (убывает) на некотором интервале, то она имеет обратную функцию на этом интервале, причем график обратной функции симметричен графику прямой функции относительно прямой $y = x$ (см. табл. 30)

Прямая функция	$y = \sin x$	$y = \cos x$	$y = \operatorname{tg} x$	$y = \operatorname{ctg} x$
Интервал монотонности (из области определения)	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$ (возрастает)	$[0; \pi]$ (убывает)	$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ (возрастает)	$(0; \pi)$ (убывает)
Множество значений прямой функции	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
Обозначение обратной функции	$y = \arcsin x$	$y = \arccos x$	$y = \operatorname{arctg} x$	$y = \operatorname{arcctg} x$
Область определения обратной функции	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$	$(-\infty; +\infty)$	$(-\infty; +\infty)$
Множество значений обратной функции	$\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$	$[0; \pi]$	$\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$	$(0; \pi)$
График обратной функции				
Некоторые особенности обратной функции	Возрастающая и нечетная	Убывающая (ни четная, ни нечетная)	Возрастающая и нечетная	Убывающая (ни четная, ни нечетная)

РЕШЕНИЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Простейшие уравнения

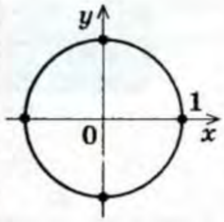
$\sin x = a$ $\lvert a\rvert > 1$ — **Корней нет** $\lvert a\rvert \leqslant 1$ — $x = (-1)^n \arcsin a + \pi n,\ n \in Z$	**Особые случаи**  $\sin x = 0;\ x = \pi k,\ k \in Z$ $\sin x = 1;\ x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$ $\sin x = -1;\ x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z$
$\cos x = a$ $\lvert a\rvert > 1$ — **Корней нет** $\lvert a\rvert \leqslant 1$ — $x = \pm\arccos a + 2\pi k,\ k \in Z$	$\cos x = 0;\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$ $\cos x = 1;\ x = 2\pi k,\ k \in Z$ $\cos x = -1;\ x = \pi + 2\pi k,\ k \in Z$
$\mathrm{tg}\, x = a$ $x = \mathrm{arctg}\, a + \pi k,\ k \in Z$	$\mathrm{tg}\, x = 0;\ x = \pi k,\ k \in Z$
$\mathrm{ctg}\, x = a$ $x = \mathrm{arcctg}\, a + \pi k,\ k \in Z$	$\mathrm{ctg}\, x = 0;\ x = \frac{\pi}{2} + \pi k,\ k \in Z$

Схема решения более сложных тригонометрических уравнений

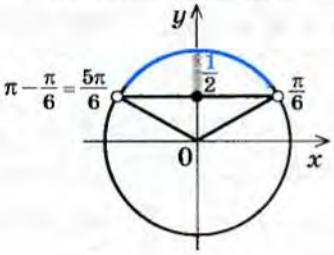
1. Пробуем привести все тригонометрические функции **к одному аргументу.**
2. Если удалось привести к одному аргументу, то пробуем привести все тригонометрические выражения к **одной функции.**
3. Если к одному аргументу удалось привести, а к одной функции — нет, то пробуем привести уравнение к **однородному.**
4. В остальных случаях переносим **все члены в одну сторону** и пробуем **получить произведение** или **используем специальные приемы решения.**
5. Если в процессе решения необходимо **отобрать корни тригонометрического уравнения,** то **производим** отбор **на одном периоде,** общем для всех функций, входящих в запись уравнения (если он существует), а **затем ответ периодически продолжаем**

Если в уравнение, неравенство или тождество переменная входит в одном и том же виде, то удобно этот вид переменной обозначить одной буквой (новой переменной)	**Пример** Решить уравнение $2\sin^2 x - 3\sin x + 1 = 0$. *Решение.* Замена $\sin x = t$. Получаем $2t^2 - 3t + 1 = 0;\ t_1 = 1;\ t_2 = \frac{1}{2}$. Тогда $\sin x = 1$ или $\sin x = \frac{1}{2}$. Отсюда $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k,\ k \in Z;\ x = (-1)^n \frac{\pi}{6} + \pi n,\ n \in Z$

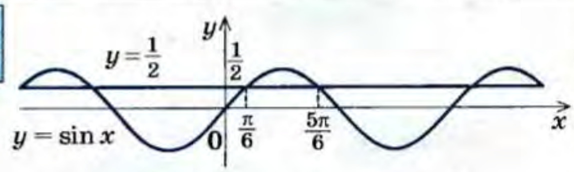
ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ НЕРАВЕНСТВА

Примеры решения простейших тригонометрических неравенств

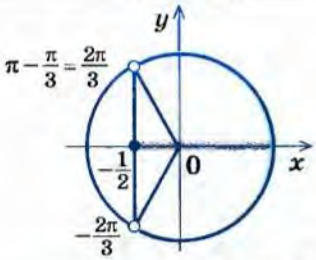
С помощью единичной окружности	С помощью графика



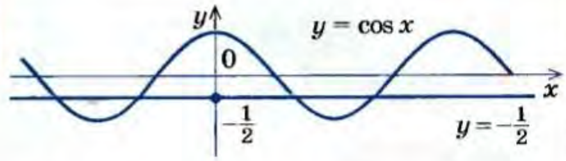
$\boxed{\sin x > \frac{1}{2}}$



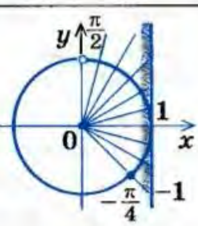
$$\frac{\pi}{6}+2\pi k < x < \frac{5\pi}{6}+2\pi k,\ k \in Z$$



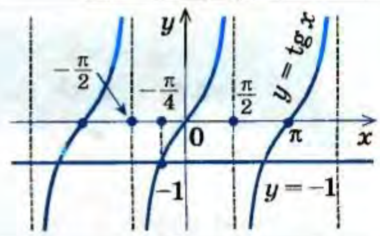
$\boxed{\cos x > -\frac{1}{2}}$



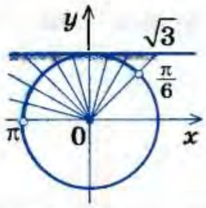
$$-\frac{2\pi}{3}+2\pi k < x < \frac{2\pi}{3}+2\pi k,\ k \in Z$$



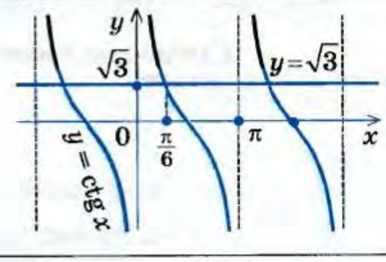
$\boxed{\mathrm{tg}\, x \geqslant -1}$



$$-\frac{\pi}{4}+\pi k \leqslant x < \frac{\pi}{2}+\pi k,\ k \in Z$$



$\boxed{\mathrm{ctg}\, x < \sqrt{3}}$



$$\frac{\pi}{6}+\pi k < x < \pi+\pi k,\ k \in Z$$

Способы решения более сложных тригонометрических неравенств

1. ***Использование равносильных преобразований***, в частности сведения к алгебраическому неравенству (по схеме: 1) к одному аргументу; 2) к одной функции; 3) замена переменной (см. табл. 70)) и последующее решение полученных простейших тригонометрических неравенств.
2. ***Использование метода интервалов***

Схема решения тригонометрических неравенств методом интервалов

1. **Привести неравенство к виду $f(x) \geq 0$.**
2. **Найти ОДЗ** неравенства.
3. **Найти общий период** (если он существует) для всех функций, входящих в запись неравенства, т. е. **период функции $f(x)$** (см. табл. 29).
4. **Найти нули функции:** $f(x) = 0$.
5. **Обозначить нули на ОДЗ внутри одного периода и найти знаки функции в каждом интервале**, на которые разбивается ОДЗ (внутри одного периода).
6. **Записать ответ, учитывая период функции $f(x)$**

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ

Понятие предела

Пусть дана некоторая функция, например $f(x) = 2x + 3$.
Рассмотрим таблицу значений этой функции в точках, которые на числовой прямой расположены достаточно близко к числу 2 (и в самой точке 2).

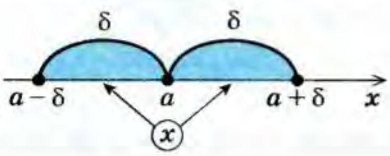
x	1,9	1,99	1,999	1,9999	2	2,0001	2,001	2,01	2,1
$f(x)$	6,8	6,98	6,998	6,9998	7	7,0002	7,002	7,02	7,2

Из таблицы видно, что чем ближе аргумент x к числу 2 (обозначается: $x \to 2$), тем ближе значение функции $f(x) = 2x + 3$к числу 7 ($f(x) \to 7$). Записывается это так: $\lim\limits_{x \to 2} (2x+3) = 7$

В общем случае $\boxed{\lim\limits_{x \to a} f(x) = B}$ означает, что
(*a* — число или один из символов: ∞; $-\infty$; $+\infty$)

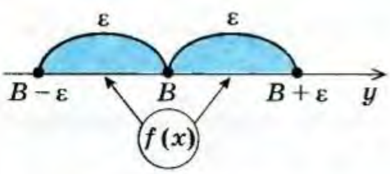
> если $x \to a$, то $f(x) \to B$,
> то есть B — число, к которому стремится значение функции $f(x)$, когда x стремится к a

Математическая запись выражений $x \to a$ и $f(x) \to B$



$x \to a$

точка x находится от точки a на малом расстоянии (меньше δ) $\Leftrightarrow$ $\boxed{|x - a| < \delta \ (\delta > 0)}$



$f(x) \to B$

значение $f(x)$ на числовой прямой находится на малом расстоянии от B (меньше ε) $\Leftrightarrow$ $\boxed{|f(x) - B| < \varepsilon \ (\varepsilon > 0)}$

Определение предела функции в точке

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = B$

Число B называется пределом функции f(x) в точке a (при x, стремящемся к a), если для любого положительного ε найдется такое положительное число δ, что при всех $x \neq a$, удовлетворяющих неравенство $|x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - B| < \varepsilon$

Свойства предела функции

1. Если $\lim\limits_{x \to a} f(x) = B$, то B — единственное	Если функция $f(x)$ имеет предел при $x \to a$, то этот предел — единственный
2. $\lim\limits_{x \to a} c = c$, где c — постоянная	Предел постоянной функции равен самой постоянной
3. $\boxed{f(x) \text{ — непрерывная в точке } a \text{ функция}}$ $\Leftrightarrow$ $\boxed{\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)}$ (по определению непрерывной функции)	Предел непрерывной функции при $x \to a$ равен значению функции в точке a

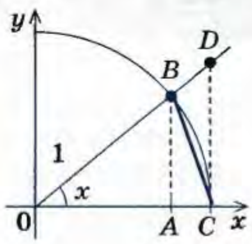
Теоремы о пределах	
4. $\boxed{\lim\limits_{x \to a} (f(x) \pm g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \pm \lim\limits_{x \to a} g(x)}$	Предел суммы (разности) двух функций равен сумме (разности) их пределов, если пределы слагаемых существуют
5. $\boxed{\lim\limits_{x \to a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim\limits_{x \to a} f(x) \cdot \lim\limits_{x \to a} g(x)}$	Предел произведения двух функций равен произведению пределов этих функций, если пределы множителей существуют
6. $\boxed{\lim\limits_{x \to a} (c \cdot f(x)) = c \cdot \lim\limits_{x \to a} f(x)}$	Постоянный множитель можно выносить за знак предела
7. $\lim\limits_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$, $\lim\limits_{x \to a} g(x) \neq 0$	Предел частного двух функций равен частному пределов этих функций, если пределы числителя и знаменателя существуют и предел знаменателя не равен нулю
Первый замечательный предел	
$\lim\limits_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$ 	**Обоснование** $S_{\Delta OBC} \leqslant S_{\text{сект. } OBC} \leqslant S_{\Delta ODC}$. Тогда $\sin x \leqslant x \leqslant \operatorname{tg} x$ при $0 < x < \frac{\pi}{2}$. Отсюда $1 \geqslant \frac{\sin x}{x} \geqslant \cos x$. Так как $\cos x \to 1$ при $x \to 0$, то, следовательно, $\frac{\sin x}{x} \to 1$ при $x \to 0$

Таблица 73

ПРЕДЕЛ ФУНКЦИИ В БЕСКОНЕЧНОСТИ	
Определение	**Примеры**
Пусть функция $f(x)$ определена на всей числовой прямой. Число B называется пределом функции $f(x)$ при $x \to \infty$, если для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое число $M > 0$, что для всех x, удовлетворяющих условию $\mid x \mid > M$, выполняется неравенство $\mid f(x) - B \mid < \varepsilon$	1. При $x \to \infty$ $f(x) = \frac{1}{x^2} \to 0$, т. е. при больших (по модулю) значениях x число $\frac{1}{x^2}$ очень мало отличается от числа 0, $\lim\limits_{x \to \infty} \frac{1}{x^2} = 0$.
Если поведение функции $f(x)$ разное при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$, то отдельно рассматривают $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x)$ (в определении берут $\mid x \mid = x$) и $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x)$ (в определении берут $\mid x \mid = -x$)	2. $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} \operatorname{arctg} x = \frac{\pi}{2}}$ (см. табл. 69). 3. $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} \operatorname{arctg} x = -\frac{\pi}{2}}$ (см. табл. 69)

Предел последовательности

Поскольку последовательность является функцией натурального аргумента $a_n = f(n)$ (см. табл. 23), то определение предела последовательности при $n \to +\infty$ полностью совпадает с определением предела функции при $n \to +\infty$.

Определение

Число B называется пределом последовательности $a_n = f(n)$, если для произвольного $\varepsilon > 0$ существует такое число $M > 0$, что для всех $n > M$ выполняется неравенство

$$|f(n) - B| < \varepsilon,$$

т. е.

$$|a_n - B| < \varepsilon$$

$a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ — последовательность.
Если при $n \to +\infty$, $a_n \to B$, то

$$\lim_{n \to +\infty} a_n = B$$

Пример

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{n} = 0,$$

так как в этом случае $a_n = \frac{1}{n}$ $(n \in N)$,

$$|a_n - B| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n}.$$

Тогда при $\varepsilon > 0$ неравенство $|a_n - B| < \varepsilon$ равносильно неравенству $\frac{1}{n} < \varepsilon$, что, в свою очередь, равносильно неравенству $n > \frac{1}{\varepsilon}$, и в качестве M можно взять число $\frac{1}{\varepsilon}$. Например, если $\varepsilon = 0{,}01$, то $M = \frac{1}{\varepsilon} = 100$ и для всех $n > 100$

$$|a_n - B| = \left|\frac{1}{n} - 0\right| < \varepsilon = 0{,}01$$

Второй замечательный предел

$$\lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e,$$

($e \approx 2{,}7182\ldots$ — основание натурального логарифма — см. табл. 21)

Сравнение возрастания показательной, степенной и логарифмической функций

При $a > 1$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{a^n}{x^n} = +\infty,$$

т. е.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^n}{a^n} = 0$$

Если $a > 1$, то при $x \to +\infty$ показательная функция $y = a^x$ растет быстрее любой степенной функции $y = x^n$, где n — натуральное число

Графически это утверждение означает, что ***при достаточно больших значениях x график функции $y = a^x$ $(a > 1)$ расположен выше графика степенной функции $y = x^n$***

При $a > 1$

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^{\frac{1}{n}}}{\log_a x} = +\infty,$$

т. е.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x^{\frac{1}{n}}} = 0$$

При больших x:

$$x^{\frac{1}{n}} < x^n,$$

поэтому

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\log_a x}{x^n} = 0$$

Если $a > 1$, то логарифмическая функция $y = \log_a x$ растет медленнее, чем степенная функция $y = x^{\frac{1}{n}}$ (и тем более медленнее, чем линейная функция $y = x$ или функция $y = x^n$, $n \in N$)

Графически это утверждение означает, что ***при достаточно больших значениях x график логарифмической функции $y = \log_a x$ $(a > 1)$ расположен ниже графика степенной функции $y = x^{\frac{1}{n}}$, $n \in N$, и тем более ниже графика функции $y = x^n$, $n \in N$)***

ПРИЕМЫ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПРЕДЕЛА ФУНКЦИИ $\lim\limits_{x\to a} f(x)$

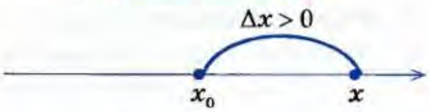
Основные этапы	Пример
1. Используя непрерывность функции $f(x)$, пробуем подставить значение $x = a$ в функцию $f(x)$	$\lim\limits_{x\to 2}\frac{9-x^2}{x-1}=\frac{9-4}{2-1}=5$
2. Если вычисляем предел при $x \to +\infty$, то в числителе и знаменателе пробуем вынести за скобки наивысшую степень неизвестного	$\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x-\sqrt{9x^4+2x^3}}{x^2-3x+1}=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2\left(\frac{1}{x}-\sqrt{9+\frac{2}{x}}\right)}{\left(1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}\right)x^2}=$ $=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{\frac{1}{x}-\sqrt{9+\frac{2}{x}}}{1-\frac{3}{x}+\frac{1}{x^2}}=\frac{0-\sqrt{9+0}}{1-0+0}=-3$
3. Если в результате подстановки $x = a$ в функцию $f(x)$ получили выражение типа $\left(\frac{0}{0}\right)$, то	
а) пробуем разложить числитель и знаменатель на множители	$\lim\limits_{x\to 3}\frac{x^2-9}{x^2-5x+6}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 3}\frac{(x-3)(x+3)}{(x-3)(x-2)}=$ $=\lim\limits_{x\to 3}\frac{x+3}{x-2}=\frac{3+3}{3-2}=6$
б) если в числитель или знаменатель входят выражения с квадратным или кубическим корнем, то умножаем числитель и знаменатель на соответствующие выражения, чтобы избавиться от заданных корней (иногда вводят замену: выражение с корнем обозначают новой переменной)	**1 способ** $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}=\left(\frac{0}{0}\right)=\lim\limits_{x\to 4}\frac{(x^2-16)(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)}=$ $\lim\limits_{x\to 4}\frac{(x-4)(x+4)(\sqrt{x}+2)}{x-4}=\lim\limits_{x\to 4}(x+4)(\sqrt{x}+2)=32$ **2 способ** Обозначим $\sqrt{x}=t$. Тогда $x=t^2$. При $x\to 4$ $t\to 2$. Тогда $\lim\limits_{x\to 4}\frac{x^2-16}{\sqrt{x}-2}=\lim\limits_{t\to 2}\frac{t^4-16}{t-2}=\lim\limits_{t\to 2}\frac{(t^2-4)(t^2+4)}{t-2}=$ $\lim\limits_{t\to 2}\frac{(t-2)(t+2)(t^2+4)}{t-2}=\lim\limits_{t\to 2}(t+2)(t^2+4)=32$
в) если под знаком предела стоят тригонометрические или обратные тригонометрические функции, то сводим такие пределы к первому замечательному пределу $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1}$ или к его вариациям $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{tg} x}{x}=1}$ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin x}{x}=1}$ $\boxed{\lim\limits_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} x}{x}=1}$	$\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x\cdot\cos 2x\cdot\operatorname{arctg} 3x}{\operatorname{tg} 7x\cdot\arcsin 4x}=\left(\frac{0}{0}\right)=$ $=\lim\limits_{x\to 0}\frac{\left(\frac{\sin 5x}{5x}\right)\cdot 5x\cdot\cos 2x\cdot\left(\frac{\operatorname{arctg} 3x}{3x}\right)\cdot 3x}{\left(\frac{\operatorname{tg} 7x}{7x}\right)\cdot 7x\cdot\left(\frac{\arcsin 4x}{4x}\right)\cdot 4x}.$ Сокращаем числитель и знаменатель на переменные, стоящие за скобками. Принимая во внимание, что $\lim\limits_{x\to 0}\cos 2x=1$, и учитывая первый замечательный предел и его вариации, получаем $\frac{1\cdot 5\cdot 1\cdot 1\cdot 3}{1\cdot 7\cdot 1\cdot 4}=\frac{15}{28}$

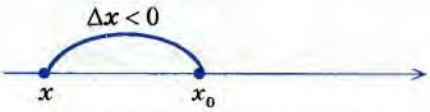
ПРОИЗВОДНАЯ

Понятие приращения аргумента и приращения функции

Приращение аргумента

$$\boxed{\Delta x = x - x_0}$$





Приращение функции

$$\boxed{\Delta y = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}$$

Пусть x и x_0 — два значения аргумента (независимой переменной) из области определения функции $y = f(x)$.

Приращением аргумента (обозначается Δx, читается: «дельта икс») называют разность $x - x_0$.

Из равенства $\Delta x = x - x_0$ имеем $x = x_0 + \Delta x$, т. е. первоначальное значение аргумента x_0 получило приращение Δx. Тогда значение функции изменилось на величину $\Delta y = f(x) - f(x_0) = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)$, которая называется ***приращением функции*** $y = f(x)$ в точке x_0 (Можно также обозначать Δf или $\Delta f(x_0)$.)

Определение производной

$$y = f(x)$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$y' = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x}$$

Производной функции $y = f(x)$ в точке x называют предел отношения приращения функции в точке x к приращению аргумента, когда приращение аргумента стремится к нулю (можно обозначить y' или $f'(x)$).

Операцию нахождения производной называют ***дифференцированием***

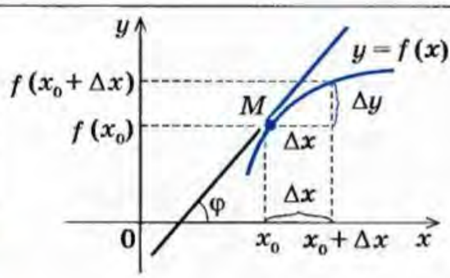
Касательная к графику функции и геометрический смысл производной

Касательной к кривой в данной точке M называют предельное положение секущей MN, когда точка N стремится вдоль кривой к точке M

$$\boxed{f'(x_0) = \operatorname{tg} \varphi}$$

k — угловой коэффициент касательной
$k = \operatorname{tg} \varphi = f'(x_0)$

$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ — уравнение касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке с абсциссой x_0



Значение производной в точке x_0 равно тангенсу угла наклона касательной к графику функции в точке с абсциссой x_0 (и равно угловому коэффициенту касательной)

Физический смысл производной

Производная характеризует скорость изменения функции при изменении аргумента

<table>
<tr><td>$S = S(t)$ — зависимость пройденного пути от времени</td><td rowspan="3">В частности, производная по времени — это мера скорости изменения, применимая к самым разнообразным физическим величинам. Например, мгновенная скорость v неравномерного прямолинейного движения — производная от функции, выражающей зависимость пройденного пути S от времени t</td></tr>
<tr><td>$v = S'(t)$ — скорость прямолинейного движения</td></tr>
<tr><td>$a = v'(t)$ — ускорение прямолинейного движения</td></tr>
</table>

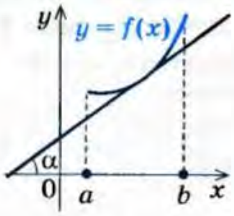
ФОРМУЛЫ И ПРАВИЛА ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ

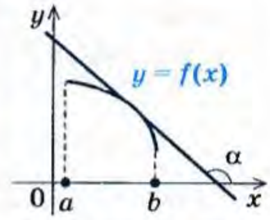
Формулы		**Правила**
Элементарные функции	**Сложные функции**	
$c' = 0$ (c — постоянная)		$(c \cdot f(x))' = cf'(x)$ (c — постоянная) *Постоянный множитель можно выносить за знак производной*
$x' = 1$		
$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha-1}$ (α — постоянная)	$(u^{\alpha})' = \alpha \cdot u^{\alpha-1} \cdot u'$	**Производная суммы** $(f + g)' = f' + g'$ *Производная суммы дифферецируемых функций равна сумме их производных*
Частные случаи		
$(\sqrt{x})' = \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$(\sqrt{u})' = \frac{1}{2\sqrt{u}} \cdot u'$	
$\left(\frac{1}{x}\right)' = (x^{-1})' = -\frac{1}{x^2}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{1}{u^2} \cdot u'$	
$(e^x)' = e^x$	$(e^u)' = e^u \cdot u'$	**Производная произведения** $(f \cdot g)' = f'g + fg'$
$(a^x)' = a^x \cdot \ln a$ ($a > 0$ — постоянная)	$(a^u)' = a^u \cdot \ln a \cdot u'$	
$(\ln x)' = \frac{1}{x}$	$(\ln u)' = \frac{1}{u} \cdot u'$	**Производная частного** $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$ $(g \neq 0)$
$(\log_a x)' = \frac{1}{x \cdot \ln a}$	$(\log_a u)' = \frac{1}{u \cdot \ln a} \cdot u'$	
$(\sin x)' = \cos x$	$(\sin u)' = \cos u \cdot u'$	**Производная сложной функции** (функции от функции) Если $y = f(u)$ и $u = u(x)$, т. е. $y = f(u(x))$, то $(f(u(x)))' = f_u'(u) \cdot u_x'(x)$
$(\cos x)' = -\sin x$	$(\cos u)' = -\sin u \cdot u'$	
$(\mathrm{tg}\, x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$(\mathrm{tg}\, u)' = \frac{1}{\cos^2 u} \cdot u'$	
$(\mathrm{ctg}\, x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$	$(\mathrm{ctg}\, u)' = -\frac{1}{\sin^2 u} \cdot u'$	
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arcsin u)' = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$	
$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$(\arccos u)' = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot u'$	**Пример** $(2x^4 + \sin^3 5x)' = (2x^4)' + (\sin^3 5x)' =$ $= 2(x^4)' + 3\sin^2 5x \cdot (\sin 5x)' =$ $= 2 \cdot 4x^3 + 3\sin^2 5x \cdot \cos 5x\,(5x)' =$ $= 8x^3 + 3\sin^2 5x \cdot \cos 5x\; 5\,(x)' =$ $= 8x^3 + 15\sin^2 5x \cdot \cos 5x$
$(\mathrm{arctg}\, x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$(\mathrm{arctg}\, u)' = \frac{1}{1+u^2} \cdot u'$	
$(\mathrm{arcctg}\, x)' = -\frac{1}{1+x^2}$	$(\mathrm{arcctg}\, u)' = -\frac{1}{1+u^2} \cdot u'$	

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ФУНКЦИИ

Монотонность и постоянство функции

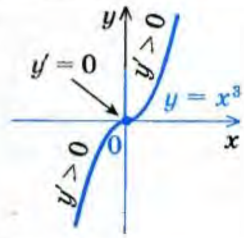
Достаточное условие возрастания функции	**Достаточное условие убывания функции**
Если в каждой точке интервала $(a;\ b)$ производная $f'(x) > 0$, то функция $f(x)$ ***возрастает*** на этом интервале	Если в каждой точке интервала $(a;\ b)$ производная $f'(x) < 0$, то функция $f(x)$ ***убывает*** на этом интервале



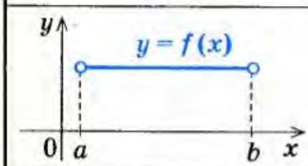


Замечание. Эти условия являются только достаточными, но не являются необходимыми условиями возрастания и убывания функции.

Например, функция $y = x^3$ — возрастающая на всей области определения, хотя в точке $x = 0$ ее производная $y = 3x^2$ равна нулю



Необходимое и достаточное условие постоянства функции

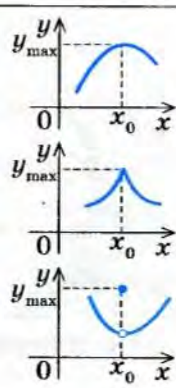


Функция $f(x)$ постоянна на интерале $(a;\ b)$ тогда и только тогда, когда $f'(x) = 0$ во всех точках этого интервала

Экстремумы (максимумы и минимумы) функции

Точка максимума

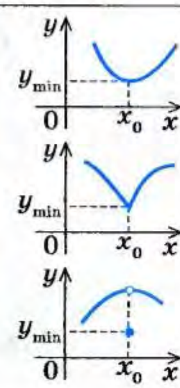
Определение. Точку x_0 из области определения функции $f(x)$ называют **точкой максимума** этой функции, если найдется δ-окрестность $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ точки x_0, такая, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.



$\boxed{x_{max} = x_0 \text{ — точка максимума}}$

Точка минимума

Определение. Точку x_0 из области определения функции $f(x)$ называют **точкой минимума** этой функции, если найдется δ-окрестность $(x_0 - \delta;\ x_0 + \delta)$ точки x_0, такая, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.



$\boxed{x_{min} = x_0 \text{ — точка минимума}}$

Точки максимума и минимума называют ***точками экстремума.***

Значения функции в точках максимума и минимума называют ***экстремумами функции*** *(максимумом и минимумом функции).*

$\boxed{y_{max} = f(x_{max}) = f(x_0) \text{ — максимум}}$

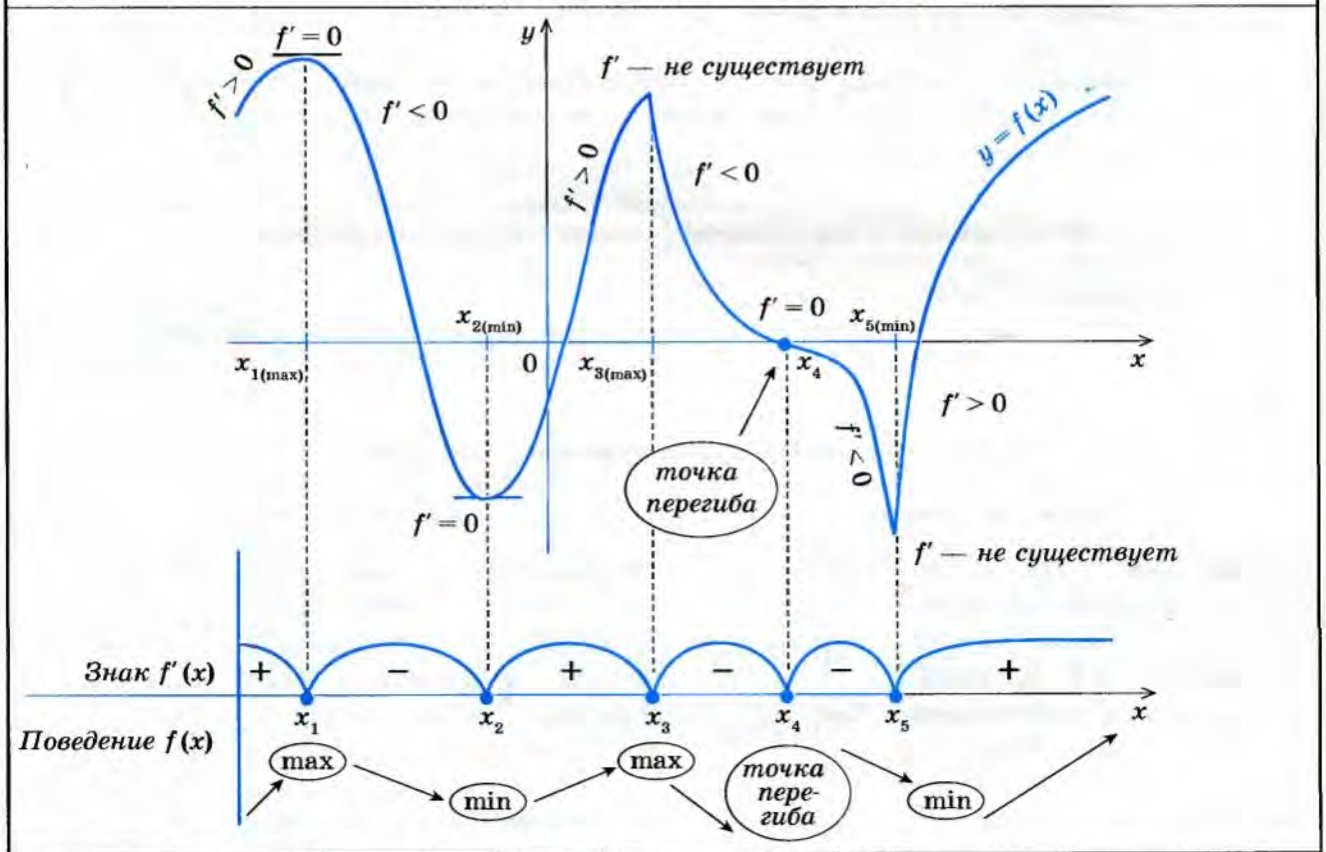
$\boxed{y_{min} = f(x_{min}) = f(x_0) \text{ — минимум}}$

Критические точки

Определение. Внутренние точки области определения функции, в которых производная функции равна нулю или не существует, называют ***критическими***

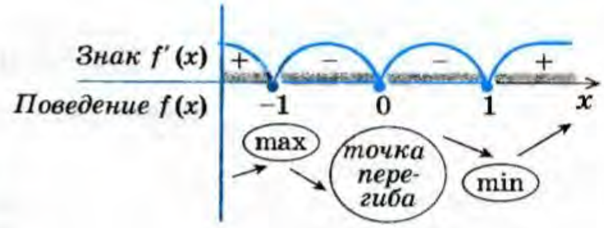
Необходимое условие экстремума	Достаточное условие экстремума
В точках экстремума производная функции $y = f(x)$ равна нулю или не существует.	Если функция $f(x)$ непрерывна в точке x_0 и производная $f'(x)$ меняет знак в точке x_0, то x_0 — точка экстремума функции $f(x)$.
x_0 — точка екстремума $\Rightarrow$ $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ — не существует	В точке x_0 знак $f'(x)$ меняется с «+» на «−» $\Rightarrow$ x_0 — точка максимума
(но не в каждой точке x_0, где $f'(x_0) = 0$ или $f'(x_0)$ не существует, будет экстремум!)	В точке x_0 знак $f'(x)$ меняется с «−» на «+» $\Rightarrow$ x_0 — точка минимума

Пример графика функции $y = f(x)$, имеющей экстремумы (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 — критические точки)



Исследование функции $y = f(x)$ на монотонность и экстремумы

Схема	Пример. $y = f(x) = 3x^5 - 5x^3 + 1$
1. Найти область определения и интервалы, на которых функция непрерывна	Область определения: $x \in \mathbf{R}$. Функция непрерывна в каждой точке своей области определения
2. Найти производную $f'(x)$	$f'(x) = 15x^4 - 15x^2 = 15x^2(x^2 - 1) = 15x^2(x - 1)(x + 1)$
3. Найти критические точки, т. е. внутренние точки области определения, в которых $f'(x) = 0$ или не существует	$f'(x)$ существует на всей области определения. $f'(x) = 0$ при $x = 0$, $x = 1$, $x = -1$

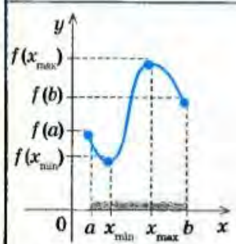
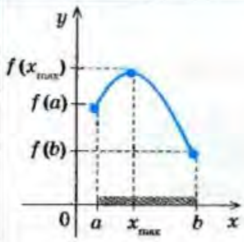
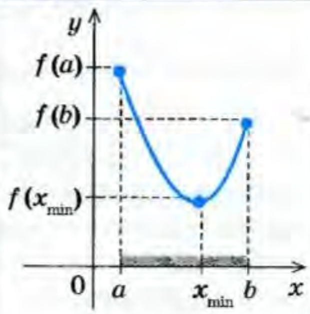
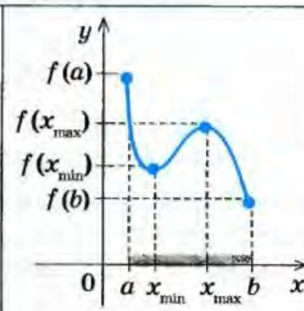
4. Отметить критические точки на области определения; найти знак производной и характер поведения функции на каждом из интервалов, на которые разбивается область определения	
5. Относительно каждой критической точки определить, является ли она точкой максимума или минимума или не является точкой экстремума	
6. Записать результат исследования (промежутки монотонности и экстремумы)	$f(x)$ возрастает при $x \in (-\infty; -1)$ и при $x \in (1; +\infty)$
	$f(x)$ убывает при $x \in (-1; 1)$
	Точки экстремума: $x_{max} = -1$; $x_{min} = 1$. Экстремумы: $y_{max} = f(-1) = 3$; $y_{min} = f(1) = -1$

Наибольшее и наименьшее значения функции, непрерывной на отрезке

Свойство

Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке и имеет на нем конечное число критических точек, то она принимает свои наибольшее и наименьшее значения на этом отрезке или в критических точках, принадлежащих этому отрезку, или на концах отрезка

Примеры

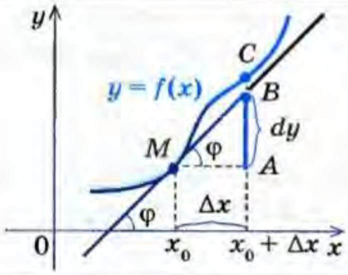
			
$\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_{max})$	$\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_{max})$	$\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$	$\max\limits_{[a;b]} f(x) = f(a)$
$\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_{min})$	$\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$	$\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(x_{min})$	$\min\limits_{[a;b]} f(x) = f(b)$

Нахождение наибольшего и наименьшего значений функции, непрерывной на отрезке

Схема	**Пример** Найти наибольшее и наименьшее значения функции $f(x) = x^3 + 3x^2 - 24x + 22$ при $x \in [1; 3]$
1. Найти производную $f'(x)$	$f'(x) = 3x^2 + 6x - 24$
2. Найти критические точки ($f'(x) = 0$ или не существует)	$f'(x) = 0$ $(3x^2 + 6x - 24 = 0)$ при $x = -4$ и при $x = 2$
3. Выбрать критические точки, принадлежащие данному отрезку	Данному отрезку $[1; 3]$ принадлежит только критическая точка $x = 2$
4. Вычислить значение функции в критических точках и на концах отрезка	$f(1) = 2$, $f(2) = -6$, $f(3) = 4$
5. Сравнить полученные значения и выбрать из них наименьшее и наибольшее	$\max\limits_{[1;3]} f(x) = f(3) = 4$, $\min\limits_{[1;3]} f(x) = f(2) = -6$

ДИФФЕРЕНЦИАЛ

Понятие дифференциала



$$\boxed{dy = df(x_0) = f'(x_0)\cdot\Delta x = AB}$$

Для любой точки x: $dy = df(x) = f'(x)\cdot\Delta x$; если $f(x) = x$, получаем $dx = (x)'\cdot\Delta x = \Delta x$, тогда $dy = df(x) = f'(x)\cdot dx$.

Пример. $d(x^5) = (x^5)'\cdot dx = 5x^4dx$

Определение. ***Дифференциалом функции*** **$y = f(x)$ в точке x_0 называют произведение производной $f'(x)$ в этой точке, т. е. $f'(x_0)$, на приращение аргумента Δx.**

(Обозначают: dy или $df(x)$, читают: «дэ игрек».)

Если MB — касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке M (с абсциссой x_0), то $f'(x_0) = \operatorname{tg}\varphi$ (табл. 75) и из ΔAMB: $AB = AM\cdot\operatorname{tg}\varphi = f'(x_0)\,\Delta x = df(x_0)$. Итак, **с геометрической точки зрения** $df(x_0)$ является приращением ординаты касательной, проведенной к кривой $f(x)$ в точке x_0, которому соответствует приращение аргумента Δx

Основное свойство дифференциала

Свойство	Обоснование
Дифференциал функции — основная линейная (т. е. пропорциональная Δx) часть приращения функции	По определению $f'(x_0) = \lim\limits_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}$. Это равенство эквивалентно равенству $\frac{\Delta y}{\Delta x} = f'(x_0) + \varepsilon(\Delta x)$ ($\varepsilon(\Delta x) \to 0$ при $\Delta x \to 0$). Тогда $$\Delta y = f'(x_0)\cdot\Delta x + \varepsilon(\Delta x)\cdot\Delta x = dy + \varepsilon(\Delta x)\cdot\Delta x. \quad (1)$$ При $\Delta x \to 0$ произведение $\varepsilon(\Delta x)\cdot\Delta x$ стремится к нулю быстрее, чем Δx. Если $f'(x_0) \neq 0$, то $\varepsilon(\Delta x)\cdot\Delta x$ при достаточно малых Δx относительно меньше первого слагаемого в сумме (1) — дифференциала dy функции $f(x)$. На рисунке $\Delta f = f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = AC$. При $\Delta x \to 0$ расстояние BC становится значительно меньше, чем расстояние $AB = dy$, поэтому $AB = dy$ — основная часть $AC = \Delta f$

Применение основного свойства дифференциала для приближенных вычислений значений функций

Если в равенстве (1) (см. выше) пренебречь вторым слагаемым (достаточно малым для малых Δx), то получим приближенное равенство

$$\Delta y = dy \text{ или}$$

$$f(x_0 + \Delta x) - f(x_0) = f'(x_0)\cdot\Delta x.$$

Тогда

$$\boxed{f(x_0 + \Delta x) \approx f(x_0) + f'(x_0)\cdot\Delta x} \quad (*)$$

при малых значениях Δx

Пример 1. Если в формуле (*) $x_0 = 0$ (когда существуют $f(0)$ и $f'(0)$, то при малых Δx имеет место приближенное равенство $f(\Delta x) \approx f(0) + f'(0)\cdot\Delta x$. Обозначим $\Delta x = \alpha$. Тогда при малых α $f(\alpha) \approx f(0) + f'(0)\cdot\alpha$.

Например: а) для $f(x) = \sin x$; $f'(x_0) = \cos x$; $f(0) = 0$. $f'(0) = \cos 0 = 1$, т. е. $\sin\alpha \approx \alpha$ **(при малых α)**

б) для $f(x) = \operatorname{tg} x$; $f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x}$; $f(0) = 0$; $f'(0) = 1$, т. е. $\operatorname{tg}\alpha \approx \alpha$ **(при малых α)**

Пример 2. Для приближенного вычисления $\sqrt[3]{1{,}012}$ возьмем $x_0 = 1$, $\Delta x = 0{,}012$, $f(x) = \sqrt[3]{x}$, $f'(x) = \left(x^{\frac{1}{3}}\right)' = \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}$.

Тогда $f(x_0) = f(1) = 1$, $f'(x_0) = f'(1) = \frac{1}{3}$ и формула (*) дает

$$\sqrt[3]{1{,}012} = f(1 + \Delta x) \approx f(1) + f'(1)\cdot\Delta x = 1 + \frac{1}{3}\cdot 0{,}012 = 1{,}004,$$

т. е. $\sqrt[3]{1{,}012} \approx 1{,}004$

ВТОРАЯ ПРОИЗВОДНАЯ И ТОЧКИ ПЕРЕГИБА

Понятие второй производной

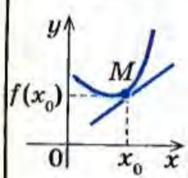
$y = f(x)$
$y' = f'(x)$
$y'' = (f'(x))' = (y')'$

Пример. $y = x^3$, $y' = 3x^2$, $y'' = 6x$.

Пусть функция $y = f(x)$ имеет производную $f'(x)$ во всех точках некоторого промежутка. Эта производная, в свою очередь, является функцией от x. Если функция $f'(x)$ дифференцируема, то ее производную называют **второй производной** от $f(x)$ и обозначают $f''(x)$ (или y'')

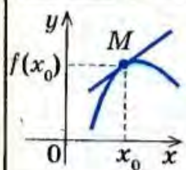
Понятия выпуклости, вогнутости и точек перегиба графика функции

Пусть функция $f(x)$ определена на промежутке $(a; b)$, а в точке $x_0 \in (a; b)$ имеет конечную производную. Тогда к графику этой функции в точке $M\ (x_0; f(x_0))$ можно провести касательную (см. табл. 75)



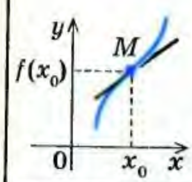
выпуклая

Если в некоторой окрестности точки M все точки кривой графика функции $y = f(x)$ (кроме самой точки M) лежат выше касательной, то говорят, что кривая (и сама функция) в точке M **выпуклая** (точнее, строго выпуклая). Также иногда говорят, что в этом случае график функции $y = f(x)$ направлен выпуклостью вниз



вогнутая

Если в некоторой окрестности точки M все точки кривой (кроме самой точки M) лежат ниже касательной, то говорят, что кривая (и сама функция) в точке M **вогнутая** (точнее, строго вогнутая). Также иногда говорят, что в этом случае график функции направлен выпуклостью вверх



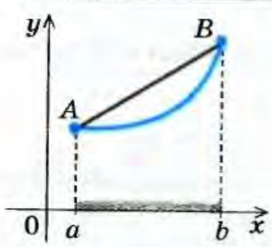
M — точка перегиба графика функции

Если точка x_0 оси абсцисс обладает таким свойством, что при переходе через нее аргумента x кривая $y = f(x)$ переходит с одной стороны касательной на другую, то точку x_0 называют **точкой перегиба** функции $y = f(x)$, а точку кривой $M\ (x_0; f(x_0))$ — точкой перегиба графика функции $y = f(x)$

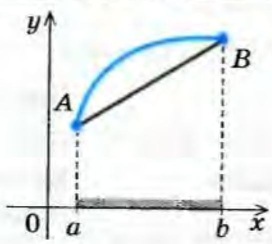
x_0 — точка перегиба функции

В некоторой окрестности точки x_0: при $x < x_0$ кривая ниже касательной, а при $x > x_0$ кривая выше касательной или наоборот)

Другой подход к введению понятий выпуклости и вогнутость графика функции

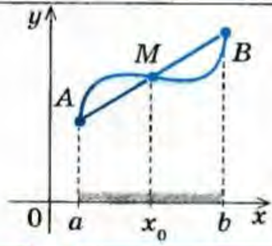


Выпуклая на отрезке $[a; b]$ $\Leftrightarrow$ Дуга кривой на отрезке $[a; b]$ лежит ниже хорды AB



Вогнутая на отрезке $[a; b]$ $\Leftrightarrow$ Дуга кривой на отрезке $[a; b]$ лежит выше хорды AB

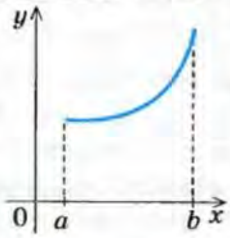
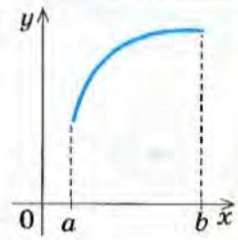
Если на отрезке $[a; b]$ график функции $y = f(x)$ направлен выпуклостью вниз, т. е. функция выпуклая (соответственно если вверх, то функция вогнутая), то внутри отрезка $[a; b]$ этот график находится под (в противном случае соответственно над) хордой AB, где $A\ (a; f(a))$, $B\ (b; f(b))$



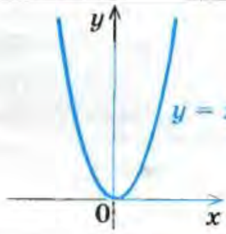
Если $x_0 \in [a; b]$ и на отрезке $[a; x_0]$ график функции $y = f(x)$ направлен выпуклостью вниз (или вверх), а на отрезке $[x_0; b]$ — выпуклостью вверх (или вниз), то точка x_0 является точкой перегиба функции, а точка $M\ (x_0; f(x_0))$ — точкой перегиба графика функции $y = f(x)$

x_0 — точка перегиба функции	$\Leftrightarrow$	Точка x_0 разделяет интервалы выпуклости этой функции

Достаточные условия выпуклости и вогнутости функции, имеющей и вторую производные при $x \in (a; b)$

Условие выпуклости	Условие вогнутости
Если в каждой точке интервала (a; b) $f''(x) > 0$, то на интервале (a; b) график функции $f(x)$ направлен выпуклостью вниз (выпуклый) 	***Если в каждой точке интервала (a; b) $f''(x) < 0$, то на интервале (a; b) график функции $f(x)$ направлен выпуклостью вверх (вогнутый)*** 

Замечание. Эти условия являются только достаточными, но не являются необходимыми.
Например, график функции $y = x^4$ направлен выпуклостью вниз на всей числовой прямой, хотя в точке $x = 0$ ее вторая производная $y'' = 12x^2$ равна нулю



Нахождение точек перегиба функции, имеющей вторую производную на данном интервале

Необходимое условие	Достаточное условие
В точках перегиба функции $f(x)$ ее вторая производная равна нулю или не существует.	***Если функция $f(x)$ имеет первую и вторую производную на интервале (a; b) и ее вторая производная меняет знак при переходе аргумента через точку $x_0 \in (a; b)$, то точка x_0 является точкой перегиба функции $f(x)$.***
x_0 — точка перегиба функции $f(x)$ $\Rightarrow$ $f''(x_0) = 0$ или $f''(x)$ не существует	В точке x_0 $f''(x)$ меняет знак $\Rightarrow$ x_0 — точка перегиба функции $f(x)$

Исследование функции $y = f(x)$ на выпуклость, вогнутость и точки перегиба

Схема	**Пример.** $y = f(x) = x^4 - 4x^3 - 18x^2 + 1$
1. Найти область определения и интервалы, на которых функция непрерывна	Область определения: $x \in \boldsymbol{R}$. Функция непрерывна в каждой точке своей области определения
2. Найти вторую производную $f''(x)$	$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 - 36x$, $f''(x) = 12x^2 - 24x - 36 = 12(x^2 - 2x - 3)$
3. Найти внутренние точки области определения, в которых $f''(x) = 0$ или не существует	$f''(x)$ на всей области определения $f''(x) = 0$ при $x = -1$, $x = 3$

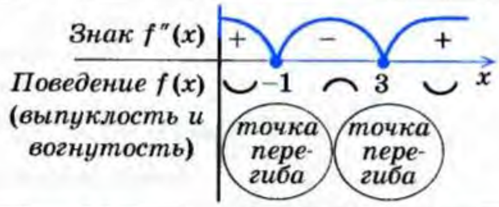
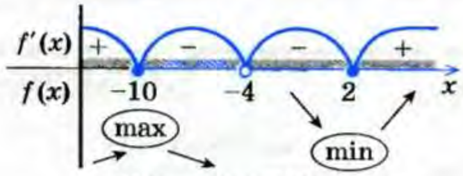
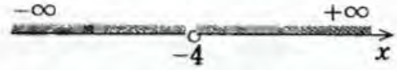
4. Отметить полученные точки на области определения, найти знак второй производной и характер поведения функции на каждом интервале, на которые разбивается область определения	
5. Записать результат исследования (интервалы выпуклости и вогнутости, точки перегиба)	В интервалах $(-\infty;\ -1)$ и $(3;\ +\infty)$ график функции $f(x)$ направлен выпуклостью вниз ($f''(x) > 0$), а в интервале $(-1;\ 3)$ — выпуклостью вверх ($f''(x) < 0$). Точки перегиба функции $f(x)$: $x = -1$ и $x = 3$ (в этих точках $f''(x)$ меняет знак)

Таблица 80

СХЕМА ИССЛЕДОВАНИЯ ФУНКЦИИ $y = f(x)$ ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ ЭСКИЗА ЕЕ ГРАФИКА

Схема	**Пример.** $f(x) = \dfrac{x^2 - 5x}{x + 4}$
1. Область определения функции (см. табл. 25)	Область определения: $x \neq -4$. $D(f) = (-\infty;\ -4) \cup (-4;\ +\infty)$
2. Четность, нечетность (табл. 26), периодичность (табл. 29)	Функция ни четная, ни нечетная и непериодическая
3. Точки пересечения с осями координат (если можно найти)	$\boxed{Oy}$ $x = 0;\ y = 0$ $\boxed{Ox}$ $y = 0;\ \dfrac{x^2 - 5x}{x + 4} = 0;$ $x^2 - 5x = 0;\ x = 0$ или $x = 5$
4. Производная и критические точки (табл. 77)	$f'(x) = \dfrac{(2x-5)(x+4) - (x^2 - 5x)}{(x+4)^2} = \dfrac{x^2 + 8x - 20}{(x+4)^2}$ $f'(x) = 0;\ x^2 + 8x - 20 = 0;$ $x_1 = -10$ или $x_2 = 2$
5. Промежутки возрастания и убывания, точки экстремума (и значение функции в этих точках) (табл. 77)	 $f(-10) = -25;\ f(2) = -1$
6. Поведение функции на концах области определения и асимптоты графика функции (вертикальные, горизонтальные и наклонные) (табл. 31)	 При $x \to -4$ слева $f(x) \to \left(\dfrac{26}{-0}\right) \to -\infty$. При $x \to -4$ справа $f(x) \to \left(\dfrac{26}{+0}\right) \to +\infty$. Следовательно, прямая $x = -4$ — **вертикальная асимптота.**

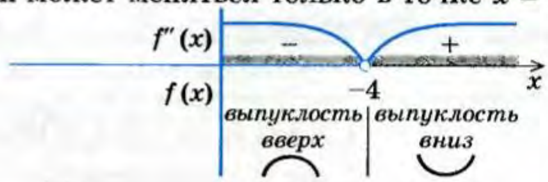
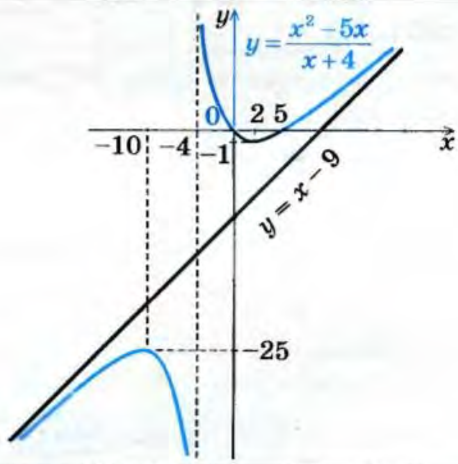
<table>
<tr><td></td><td>Так как $f(x)=\frac{x^2-5x}{x+4}=\frac{x(x+4)-9(x+4)+36}{x+4}=$ $=x-9+\frac{36}{x+4}$, то при $x \to \infty$ $\frac{36}{x+4} \to 0$, тогда $f(x) \to x-9$, т. е. прямая $y=x-9$ — наклонная асимптота</td></tr>
<tr><td>7. Вторая производная и исследование функции на выпуклость и вогнутость. Найти точки перегиба (если они существуют) и значения $f(x)$ в точках перегиба (этот этап не входит в минимальную схему исследования функции)</td><td>$f''(x)=(f'(x))'=\frac{(2x+8)(x+4)^2-2(x+4)(x^2+8x-20)}{(x+4)^4}=$ $=\frac{72}{(x+4)^3}.$
Поскольку $f''(x) \neq 0$, то знак второй производной может меняться только в точке $x=-4$.

</td></tr>
<tr><td>8. Если необходимо, найти координаты дополнительных точек, уточняющих поведение графика</td><td><table><tr><td>x</td><td>−6</td><td>−2</td></tr><tr><td>y</td><td>−33</td><td>7</td></tr></table></td></tr>
<tr><td>9. На основании проведенного исследования построить эскиз графика функции $y=f(x)$</td><td>
</td></tr>
</table>

Таблица 81

ПРИМЕНЕНИЕ ПРОИЗВОДНОЙ К РЕШЕНИЮ УРАВНЕНИЙ И ИХ СИСТЕМ

1. Оценка значений левой и правой частей уравнения*

Ориентир

$\boxed{\begin{array}{c} f(x)=g(x) \\ \hline f(x) \geqslant a \\ g(x) \leqslant a \end{array}} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x)=a, \\ g(x)=a \end{cases}$	Если нужно решить уравнение вида $f(x)=g(x)$ и выяснилось, что $f(x) \geqslant a$, $g(x) \leqslant a$, то равенство между левой и правой частями возможно только в случае, если одновременно $f(x)$ и $g(x)$ равны a

* См. также табл. 43.

Пример

Решите уравнение $\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}=x^2-4x+6$.

Оценим значения левой и правой частей уравнения.

$g(x) = x^2 - 4x + 6 = (x-2)^2 + 2 \geqslant 2$, $f(x)=\sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}$. Исследуем функцию $f(x)$ на наибольшее и наименьшее значения с помощью производной. $D(f)$: $\begin{cases} x-1 \geqslant 0, \\ 3-x \geqslant 0, \end{cases}$ т. е. $1 \leqslant x \leqslant 3$.

$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}-\frac{1}{2\sqrt{3-x}}$. Производная не существует в точках 1 и 3 из области определения функции $f(x)$, но эти точки не являются внутренними для $D(f)$, следовательно, они не являются критическими. $f'(x) = 0$, $\frac{1}{2\sqrt{x-1}}-\frac{1}{2\sqrt{3-x}}=0$, $\sqrt{3-x}=\sqrt{x-1}$, $3 - x = x - 1$,

$x = 2$ — критическая точка ($f'(2) = 0$).

Непрерывная функция* $f(x)$ задана на отрезке $[1; 3]$, поэтому она принимает наибольшее и наименьшее значения или на концах этого отрезка, или в критической точке этого отрезка. Поскольку $f(1)=f(3)=\sqrt{2}$, а $f(2) = 2$, то $\max\limits_{[1;3]} f(x)=f(2)=2$, т. е.** $f(x) \leqslant 2$. Кроме того, $g(x) \geqslant 2$.

Следовательно, заданное уравнение равносильно системе: $\begin{cases} \sqrt{x-1}+\sqrt{3-x}=2, \\ (x-2)^2+2=2 \end{cases} \Leftrightarrow x=2$.

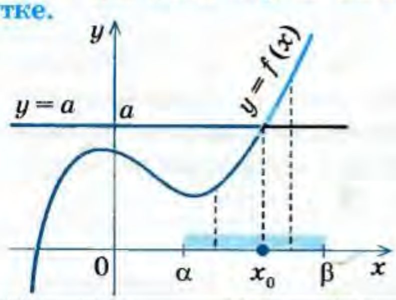
Ответ: 2

2. Использование возрастания и убывания функций

Схема решения уравнения

1. Подбираем один или несколько корней уравнения.

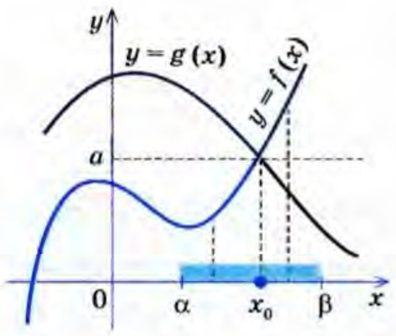
2. Доказываем, что других корней это уравнение не имеет (используя теоремы о корнях уравнения или оценку значений левой и правой частей уравнения, или следующее свойство функций: возрастающая или убывающая функция принимает каждое свое значение только в одной точке ее области определения)

Теоремы о корнях уравнения	Пример
1. Если в уравнении $f(x) = a$ функция $f(x)$ возрастает (убывает) на некотором промежутке, то это уравнение может иметь не больше чем один корень на этом промежутке.  	1. Уравнение $2x + \cos x = \pi$ имеет корень*** $x=\frac{\pi}{2}$ $\left(2\cdot\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{2}=\pi\right.$, т. е. $\left.\pi=\pi\right)$. Других корней это уравнение не имеет, поскольку функция $f(x) = 2x + \cos x$ возрастающая (ее производная $f'(x) = 2 - \sin x > 0$ при всех значениях x из области определения: $D(f) = \boldsymbol{R}$). *Ответ*: $\frac{\pi}{2}$
2. Если в уравнении $f(x) = g(x)$ функция $f(x)$ возрастает на некотором промежутке, а функция $g(x)$ убывает на этом промежутке (или наоборот), то это уравнение может иметь не больше чем один корень на этом промежутке.	2. Уравнение $e^x - x=\frac{1}{\sqrt{x+1}}$ имеет корень*** $x = 0$ $\left(e^0-0=\frac{1}{\sqrt{0+1}}\right.$, т. е. $\left.1=1\right)$. Других корней это уравнение не имеет, поскольку его ОДЗ: $x \geqslant 0$,

* Заметим, что в точке $x = 1$ функция $f(x)$ непрерывна справа, а в точке $x = 3$ — слева.

** Мы могли бы точнее оценить область значений непрерывной функции $f(x)$: поскольку $\min\limits_{[1;3]} f(x)=f(1)=f(3)=\sqrt{2}$, то $\sqrt{2}\leqslant f(x)\leqslant 2$, но для приведенного решения достаточно оценки $f(x) \leqslant 2$.

*** Корни в примерах 1 и 2 получены подбором. Как правило, подбор начинают с целых значений: $x = 0, \pm1, \pm2$ ..., которые подставлят в заданное уравнение, а для тригонометрических уравнений проверяют также «табличные» значения: $x = 0$, $\pm\frac{\pi}{6}$, $\pm\frac{\pi}{4}$, $\pm\frac{\pi}{3}$, $\pm\frac{\pi}{2}$, ...

	и на этой ОДЗ функция $f(x)=e^x-x$ является возрастающей (ее производная $f'(x)=e^x-1$ равна нулю при $x=0$ и $f'(x)>0$ при $x>0$, а учитывая непрерывность функции $f(x)$, получаем, что $f(x)$ возрастает при $x \geqslant 0$). Функция $g(x)=\frac{1}{\sqrt{x}+1}$ убывает при $x \geqslant 0$ $\left(g'(x)=\frac{-\frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}+1\right)^2}<0\right.$ при $x \geqslant 0$). Следовательно, уравнение $f(x)=g(x)$ имеет единственный корень $x=0$. *Ответ*: 0

Решите систему уравнений $\begin{cases} 3x-3y=\sin x-\sin y, \\ 2x^3-y^3=1. \end{cases}$

Решение	**Комментарий**
Заданная система равносильна системе $$\begin{cases} 3x-\sin x=3y-\sin y, \\ 2x^3-y^3=1. \end{cases} \quad (1)$$ Рассмотрим функцию $$f(t)=3t-\sin t.$$ Поскольку $f'(t)=3-\cos t>0$ всегда, то на своей области определения ($t \in \boldsymbol{R}$) функция $f(t)$ является возрастающей. Тогда первое уравнение системы (1), которое имеет вид $f(x)=f(y)$, равносильно уравнению $x=y$. Следовательно, система (1) равносильна системе $\begin{cases} x=y, \\ 2x^3-y^3=1. \end{cases}$ Подставляя $x=y$ во второе уравнение системы, имеем $$2y^3-y^3=1,$$ $$y^3=1,\ y=1.$$ Тогда $$x=y=1.$$ *Ответ*: (1; 1)	Решить заданную систему с помощью равносильных преобразований не удается. Поэтому попробуем использовать свойства функций. Если в первом уравнении системы члены с переменной x перенести в одну сторону, а с переменной y — в другую, то получим в левой и правой частях уравнения значения одной и той же функции. С помощью производной легко проверить, что эта функция является возрастающей. Но *равенство $f(x)=f(y)$ для возрастающей функции возможно тогда и только тогда, когда $x=y$,* поскольку каждое свое значение возрастающая (или убывающая) функция может принимать только при одном значении аргумента. Коротко этот результат можно сформулировать так: **если функция $f(x)$ является возрастающей (или убывающей) на определенном множестве, то на этом множестве $f(\alpha)=f(\beta) \Leftrightarrow \alpha=\beta$**

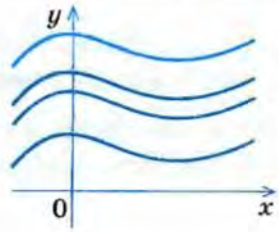
Таблица 82

ПЕРВООБРАЗНАЯ И ИНТЕГРАЛ

Первообразная

Определение	**Примеры**
Функцию $F(x)$ называют **первообразной для функции $f(x)$** на данном промежутке, если для любого x из этого промежутка $$F'(x)=f(x)$$	1. Для функции $f(x)=x^2$ на интервале $(-\infty;+\infty)$ первообразной является функция $F(x)=\frac{x^3}{3}$, так как $F'(x)=\left(\frac{x^3}{3}\right)'=\frac{1}{3}\cdot 3x^2=x^2$ 2. Для функции $f(x)=\frac{1}{x}$ на интервале $(0;+\infty)$ первообразной является функция $F(x)=\ln x$, поскольку $F'(x)=(\ln x)'=\frac{1}{x}$

Основное свойство первообразных

Свойство	Геометрическое содержание
Если функция $F(x)$ является первообразной для функции $f(x)$ на данном промежутке, а C — произвольная постоянная, то функция $F(x)+C$ также является первообразной для функции $f(x)$, при этом любая первообразная для функции $f(x)$ на данном промежутке может быть записана в виде $F(x)+C$, где C — произвольная постоянная	*Графики любых первообразных для данной функции получаются друг из друга параллельным переносом вдоль оси Oy* 

Неопределенный интеграл

Определение	Правила интегрирования
Совокупность всех первообразных данной функции $f(x)$ называется **неопределенным интегралом** и обозначается символом $\int f(x)dx$, т. е. $\int f(x)dx=F(x)+C$, где $F(x)$ — одна из первообразных для функции $f(x)$, а C — некоторая постоянная	$\int c\cdot f(x)dx=c\int f(x)dx$, где c — некоторая постоянная
	$\int (f(x)\pm g(x))dx=\int f(x)dx\pm\int g(x)dx$
	$\int f(kx+b)dx=\frac{1}{k}F(kx+b)+C$

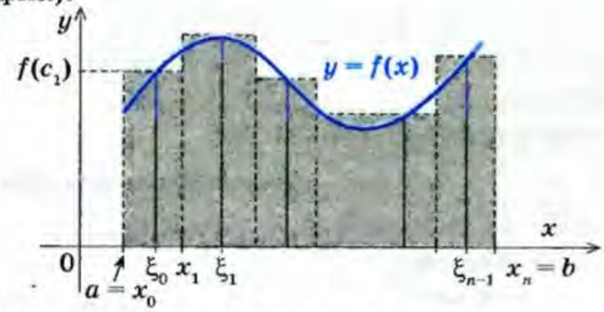
Таблица первообразных (неопределенных интегралов)

Функция $f(x)$	Общий вид первообразных $F(x)+C$	Запись с помощью неопределенного интеграла
0	C	$\int 0\cdot dx=C$
1	$x+C$	$\int dx=x+C$
x^{α} $(\alpha\neq-1)$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$	$\int x^{\alpha}dx=\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}+C$ $(\alpha\neq-1)$
$\frac{1}{x}$	$\ln\|x\|+C$	$\int\frac{dx}{x}=\ln\|x\|+C$
$\sin x$	$-\cos x+C$	$\int\sin x\,dx=-\cos x+C$
$\cos x$	$\sin x$	$\int\cos x\,dx=\sin x+C$
$\frac{1}{\cos^2 x}$	$\operatorname{tg} x+C$	$\int\frac{dx}{\cos^2 x}=\operatorname{tg} x+C$
$\frac{1}{\sin^2 x}$	$-\operatorname{ctg} x+C$	$\int\frac{dx}{\sin^2 x}=-\operatorname{ctg} x+C$
e^x	e^x+C	$\int e^x dx=e^x+C$
$a^x\begin{pmatrix}a>0\\a\neq1\end{pmatrix}$	$\frac{a^x}{\ln a}+C$	$\int a^x dx=\frac{a^x}{\ln a}+C$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\operatorname{arctg} x+C$ или $-\operatorname{arcctg} x+C$	$\int\frac{dx}{1+x^2}=\begin{cases}\operatorname{arctg} x+C,\\-\operatorname{arcctg} x+C\end{cases}$
$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\arcsin x+C$ или $-\arccos x+C$	$\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}=\begin{cases}\arcsin x+C,\\-\arccos x+C\end{cases}$

ОПРЕДЕЛЕННЫЙ ИНТЕГРАЛ

Построение интегральной суммы на примере определения площади криволинейной трапеции

Пусть на отрезке $[a; b]$ дана неотрицательная непрерывная функция $f(x)$ (см. график).



Чтобы определить площадь криволинейной трапеции (ограниченной кривой $y = f(x)$, осью Ox, прямыми $x = a$ и $x = b$), разбиваем отрезок $[a; b]$ точками

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b \qquad (*)$$

на n частей и выбираем на каждом из получившихся частичных отрезков $[x_k, x_{k+1}]$, где $k = 0, 1, \ldots, n-1$, произвольную точку ξ_k. Вычисляем значение функции $f(x)$ в этих точках $f(\xi_k)$ и составляем сумму

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x, \text{ где } \Delta x = x_{k+1} - x_k. \qquad (**)$$

Эту сумму, равную сумме площадей заштрихованных прямоугольников, называют **интегральной суммой.**

Допустим, что число точек разбиения неограниченно увеличивается и длина самого большого отдельного отрезка разбиения стремится к нулю. При этом величина S_n стремится к определенному пределу S, не зависящему от способа разбиения (*) и выбора точек ξ_k на отдельных отрезках. В таком случае величину S называют **площадью криволинейной трапеции**, т. е. $S = \lim\limits_{\max \Delta x_k \to 0} \sum\limits_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x$

Определение определенного интеграла

Если функция $f(x)$ определена на отрезке $[a; b]$ и $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$, то определенным интегралом от функции $f(x)$ на отрезке $[a; b]$ называют число, равное пределу интегральной суммы (**), т. е.

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{\max \Delta x_k \to 0} \sum_{k=0}^{n-1} f(\xi_k)\Delta x,$$

где $x_k \leqslant \xi_k \leqslant x_{k+1}$ и $\Delta x = x_{k+1} - x_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$

Формула Ньютона—Лейбница

Если функция $f(x)$ определена и непрерывна на отрезке $[a; b]$ и $F(x)$ — любая первообразная для нее (т. е. $F'(x) = f(x)$), то

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)}$$

Пример. Поскольку для $f(x) = x^3$ одна из первообразных $F(x) = \frac{x^4}{4}$, то

$$\int_1^2 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Bigg|_1^2 = \frac{2^4}{4} - \frac{1^4}{4} = 4 - \frac{1}{4} = 3\frac{3}{4}$$

Основные свойства определенного интеграла

$$\int_a^a f(x)\,dx = 0$$

$$\int_a^b f(x)\,dx = -\int_b^a f(x)\,dx$$

$$\int_a^b (f(x) \pm g(x))\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$$

$$\int_a^b k \cdot f(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx, \quad \text{где } k = \text{const}$$

Если $f(x)$ интегрируема на $[a; b]$ и $c \in [a; b]$, то

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx$$

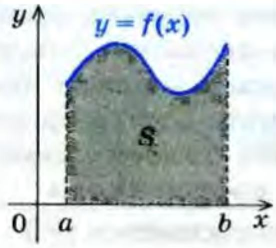
Вычисление площадей и объемов с помощью определенного интеграла

Площадь криволинейной трапеции

Формула

Площадь криволинейной трапеции, ограниченной на отрезке $[a;\ b]$ графиком непрерывной положительной функции $f(x)$, осью Ox и прямыми $x = a$ и $x = b$, равна

$$\boxed{S=\int_a^b f(x)\,dx}$$



Пример

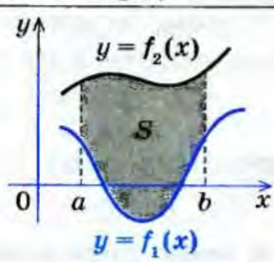
Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = \sin x;\ y = 0;\ x = \frac{\pi}{3};\ x = \frac{\pi}{2}$

Изображая эти линии, получаем криволинейную трапецию

$$S=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=-\cos x\,\Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}}=-\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

Площадь фигуры, ограниченной графиками двух функций и прямыми $x = a$ и $x = b$

Формула



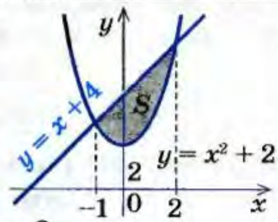
Если на данном отрезке $[a;\ b]$ непрерывные функции $y = f_1(x)$ и $y = f_2(x)$ обладают таким свойством, что $f_2(x) \geqslant f_1(x)$ для всех $x \in [a;\ b]$, то

$$\boxed{S=\int_a^b (f_2(x)-f_1(x))\,dx} \qquad (1)$$

Пример

Вычислить площадь фигуры, ограниченной линиями $y = x^2 + 2$, $y = x + 4$

Изобразим данные линии и абсциссы их точек пересечения.



Абсциссы точек пересечения:

$x^2 + 2 = x + 4$

$x^2 - x - 2 = 0,\ x_1 = -1,\ x_2 = 2.$

Тогда по формуле (1)

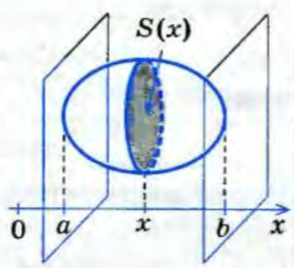
$$S=\int_{-1}^{2}((x+4)-(x^2+2))\,dx=$$

$$=\int_{-1}^{2}(x+2-x^2)\,dx=\left(\frac{x^2}{2}+2x-\frac{x^3}{3}\right)\Big|_{-1}^{2}=4\frac{1}{2}$$

Объемы тел

В общем случае

Если тело заключено между двумя перпендикулярными к оси Ox плоскостями, которые проходят через точки $x = a$ и $x = b$, то

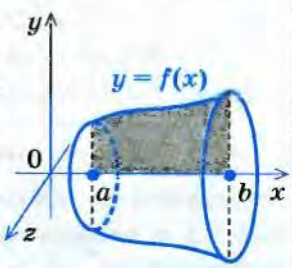


$$V=\int_a^b S(x)\,dx,$$

где $S(x)$ — площадь сечения тела плоскостью, проходящей через точку $x \in [a;\ b]$ и перпендикулярной к оси Ox

Для тела вращения

Если тело получено в результате вращения вокруг оси Ox криволинейной трапеции, ограниченной на отрезке $[a;\ b]$ графиком непрерывной неотрицательной функции $y = f(x)$ и прямыми $x = a$ и $x = b$, то



$$V=\pi\int_a^b f^2(x)\,dx$$

КОМБИНАТОРИКА

Комбинаторика — раздел математики о выборе и размещении элементов некоторого множества на основании каких-либо условий.
Выбранные (или выбранные и размещенные) группы элементов называют ***соединениями***

Перестановки

Определение. ***Перестановками из n элементов*** называют различные конечные упорядоченные множества (т. е. такие множества, для которых указан порядок размещения их элементов), которые можно получить из некоторого множества, содержащего n элементов. Если все элементы данного множества различны, получаем ***перестановки без повторений***, а если элементы могут повторяться, то ***перестановки с повторениями***

Формулы для числа перестановок (P_n)

Без повторений	С повторениями
$\boxed{P_n = n!}$, где $n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot n$ (читается: «эн факториал»). Для $n = 0$ $0! = 1$ (по определению)	$\boxed{\tilde{P}_n = \dfrac{n!}{k_1!k_2!\ldots k_m!}}$ где $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$
Пример. Количество различных шестизначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, не повторяя эти цифры в одном числе, равно $P_6 = 6! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6 = 720$	**Пример.** Количество различных шестизначных чисел, которые можно составить из трех двоек, двух семерок и одной пятерки, $\tilde{P}_6 = \dfrac{6!}{3!\cdot 2!\cdot 1!} = \dfrac{720}{6\cdot 2\cdot 1} = 60$ (учтено, что $3 + 2 + 1 = 6$)

Размещения

Определение. ***Размещением из n элементов по k*** называют любое упорядоченное множество из k элементов, составленное из элементов n-элементного множества. Если выбранные элементы не повторяются, то получаем ***размещение без повторений***, а если повторяются, то ***размещение с повторениями***

Формулы для числа размещений $\left(A_n^k\right)$

без повторений	с повторениями
$A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	$\tilde{A}_n^k = n^k$
Пример. Количество различных трехзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры не могут повторяться, $A_6^3 = \dfrac{6!}{(6-3)!} = \dfrac{6!}{3!} = \dfrac{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5\cdot 6}{1\cdot 2\cdot 3} = 4\cdot 5\cdot 6 = 120$	**Пример.** Количество различных трехзначных чисел, которые можно составить из цифр 1, 2, 3, 4, 5, 6, если цифры в числе могут повторяться, $\tilde{A}_6^3 = 6^3 = 216$

Сочетание

без повторений	с повторениями
Определение. ***Сочетанием без повторений из n элементов по k*** называют любое k-элементное подмножество n-элементного множества	**Определение.** Пусть есть n элементов (не обязательно различных) данного множества. ***Сочетаниями из n элементов по k*** называют наборы этих элементов, в каждый из которых входит k элементов и которые отличаются только составом элементов (хотя бы одним элементом)

Формулы для числа сочетаний $\left(C_n^k\right)$	
без повторений	**с повторениями**
$C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ (по определению считают, что $C_n^0 = 1$)	$\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$
Пример. Из 25 учащихся в классе можно выделить 5 человек для дежурства по школе C_{25}^5 способами, т. е. $C_{25}^5 = \frac{25!}{5!(25-5)!} = \frac{25!}{5!\cdot 20!} = \frac{21\cdot 22\cdot 23\cdot 24\cdot 25}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5} = 53\,130$ способами	**Пример.** Если в продаже имеются цветы четырех сортов, то различных букетов, состоящих из 7 цветков, можно составить $\tilde{C}_4^7 = C_{4+7-1}^7 = C_{10}^7 = \frac{10!}{7!(10-7)!} = \frac{10!}{7!\cdot 3!} = \frac{8\cdot 9\cdot 10}{1\cdot 2\cdot 3} = 120$ способами

Некоторые свойства числа сочетаний без повторений

1. $C_n^k = C_n^{n-k}$ (в частности, $C_n^n = C_n^{n-n} = C_n^0 = 1$)	2. $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$ 3. $C_n^0 + C_n^1 + \ldots + C_n^n = 2^n$

Бином Ньютона (см. также табл. 14)

$$\boxed{(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 + \ldots + C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + b^n}$$

Так как $1 = C_n^0 = C_n^n$ и $b^0 = 1$, $a^0 = 1$ ($a \neq 0$, $b \neq 0$),

то формулу бинома Ньютона можно записать еще и так:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n b^0 + C_n^1 a^{n-1}b + \ldots + C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots + C_n^{n-1}ab^{n-1} + C_n^n a^0 b^n.$$

Общий член этого разложения имеет вид

$$T_{k+1} = C_n^k a^{n-k} b^k,$$

где $k = 0, 1, \ldots, n$.

Коэффициенты C_n^k называются ***биномиальными коэффициентами***

Свойства биномиальных коэффициентов

1. Число биномиальных коэффициентов (а следовательно, и число слагаемых в разложении степени бинома) равно $n + 1$.
2. Коэффициенты членов, равноудаленных от начала и конца разложения, равны между собой (так как $C_n^m = C_n^{n-m}$).
3. Сумма всех биномиальных коэффициентов равна 2^n.
4. Сумма биномиальных коэффициентов, стоящих на четных местах, равна сумме биномиальных коэффициентов, стоящих на нечетных местах.
5. Для вычисления биномиальных коэффициентов можно пользоваться треугольником Паскаля (см. табл. 14), в котором вычисление коэффициентов основывается на формуле $C_{n+1}^{k+1} = C_n^k + C_n^{k+1}$

Натуральная степень разности двух величин

Если в формуле бинома Ньютона заменить b на $-b$, то получим

$$\boxed{(a-b)^n = a^n - C_n^1 a^{n-1}b + C_n^2 a^{n-2}b^2 - C_n^3 a^{n-3}b^3 + \ldots + (-1)^n b^n}$$

Например, $(a - b)^5 = a^5 - 5a^4b + 10a^3b^2 - 10a^2b^3 + 5ab^4 - b^5$

СХЕМА РЕШЕНИЯ КОМБИНАТОРНЫХ ЗАДАЧ

Выбор правила

Правило суммы	Правило произведения
Если элемент A можно выбрать m способами, а после этого элемент B — n способами, то A **или** B можно выбрать $(m + n)$ способами	Если элемент A можно выбрать m способами, а элемент B — n способами, то A **и** B можно выбрать $(m \cdot n)$ способами

Выбор формулы

Учитывается ли порядок следования элементов в соединении?

- Да → **Все ли элементы входят в соединение?**
  - Да → **Перестановки**
  - Нет → **Размещения**
- Нет → **Сочетания**

Перестановки		Размещения		Сочетания	
без повторений	с повторениями	без повторений	с повторениями	без повторений	с повторениями
$P_n = n!$	$\tilde{P}_n = \dfrac{n!}{k_1! \cdot k_2! \cdot \ldots \cdot k_m!}$, где $k_1 + k_2 + \ldots + k_m = n$	$A_n^k = \dfrac{n!}{(n-k)!}$	$\tilde{A}_n^k = n^k$	$C_n^k = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$	$\tilde{C}_n^k = C_{n+k-1}^k$

Таблица 86

ПОНЯТИЕ ВЕРОЯТНОСТИ СЛУЧАЙНОГО СОБЫТИЯ

Определение	Примеры
Случайные эксперименты и случайные события	
Событие, которое может произойти, а может и не произойти в ходе наблюдения или эксперимента в одних и тех же условиях, называют ***случайным событием*** (а сам эксперимент — случайным ***экспериментом***)	Выпадение «герба» и выпадение «числа» при подбрасывании монеты; выигрыш в лотерею, выпадение определенного количества очков при бросании игрального кубика и т. д.
Частота и относительная частота случайного события	
Если при неизменных условиях проведен n раз случайный эксперимент и в $n(A)$ случаях произошло событие A, то число $n(A)$ называют ***частотой события A***	Событие A — выпадение «герба» при подбрасывании монеты.
Относительной частотой случайного события называют отношение числа $n(A)$ появлений этого события к общему числу n проведенных экспериментов: $\dfrac{n(A)}{n}$	

Экспериментаторы	Бюффон	Пирсон	Феллер
Число экспериментов n	4040	24 000	10 000
Частота события $n(A)$	2048	12 012	4979
Относительная частота $\dfrac{n(A)}{n}$	0,5069	0,5005	0,4979

Статистическое определение вероятности

Если при проведении большого количества случайных экспериментов, в каждом из которых может произойти или не произойти событие A, значение относительной частоты близко к некоторому определенному числу, то это число называют ***вероятностью случайного события*** A и обозначают $P(A)$. $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$	Событие A — выпал «герб» при подбрасывании монеты. $P(A) = 0{,}5$

Достоверные и невозможные события

Достоверное событие — это событие U, которое обязательно происходит при каждом повторении эксперимента. $P(U) = 1$	**Выпадение меньше 7 очков при бросании игрального кубика (на гранях обозначено от 1 до 6 очков)**
Невозможное событие (его часто обозначают $\varnothing$) — это событие, которое в данном эксперименте наступить не может. $P(\varnothing) = 0$	**Выпадение 7 очков при бросании игрального кубика**

Классическое определение вероятности

Для равновозможных элементарных событий (то есть событий, вероятность которых одинакова) ***вероятность события A — это отношение количества элементарных событий (m), благоприятствующих этому событию, к количеству всех равновозможных элементарных событий в данном эксперименте (n):*** $P(A) = \frac{m}{n}$	**Пример.** Найдите вероятность выпадения числа очков, кратного трем, при бросании игрального кубика. *Решение.* Рассмотрим как элементарные события шесть равновозможных результатов бросания кубика — выпало 1, 2, 3, 4, 5 или 6 очков (события попарно несовместимы, и в результате эксперимента обязательно произойдет одно из этих событий, следовательно, в этой задаче $n = 6$). Событие A — выпало число очков, кратное трем. Благоприятствуют событию A только два элементарных события — выпало 3 или 6 очков (то есть $m = 2$). Тогда $P(A) = \frac{m}{n} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Геометрическое определение вероятности

Основные понятия

U — некоторая фигура на площади, $S(U)$ — площадь фигуры U.

Эксперимент — это случайный выбор какой-то точки u из фигуры U (можно также представить, что эту точку u случайно бросили на фигуру U).

Элементарные события u — точки фигуры U.

A — часть фигуры U ($A \subseteq U$); $S(A)$ — площадь фигуры A.

Событие A — попадание точек u в фигуру A. Тогда *элементарными событиями, благоприятствующими событию A, будут все точки фигуры A.* (Предполагаем, что вероятность попадания точки в часть фигуры U пропорциональна площади этой части и не зависит от ее конфигурации и расположения в фигуре U.)

Определение геометрической вероятности

$P(A) = \frac{S(A)}{S(U)}$	***Геометрической вероятностью события*** A называют отношение площади фигуры, благоприятствующей событию A, к площади всей заданной фигуры

СЛУЧАЙНАЯ ВЕЛИЧИНА

Определение	Пример
Понятия случайной величины и ее распределения	
Под ***случайной величиной*** в теории вероятностей понимают переменную величину, которая в данном случайном эксперименте может принимать те или иные числовые значения с определенной вероятностью. Обозначают случайные величины *прописными буквами латинского алфавита*: X, Y, Z, ..., а их значения — соответствующими *строчными буквами*: x, y, z, ... Тот факт, что случайная величина X приняла значение x, записывают так: $X = x$	Например, в эксперименте по подбрасыванию монеты пространство элементарных событий состоит из двух событий: u_1 — выпал «герб», u_2 — выпало «число». Эти события несовместны, и в результате эксперимента обязательно произойдет только одно из этих событий. Поставим в соответствие событию u_1 число 1, а событию u_2 — число 0 (то есть будем считать, что в случае появления «герба» выпадает число 1, а в случае появления «числа» выпадает 0). Тогда получим случайную величину X, которая принимает только два значения: $x_1 = 1$, $x_2 = 0$ (то есть $X\ (u_1) = x_1 = 1$, $X\ (u_2) = x_2 = 0$). Рассмотренную функцию — случайную величину X — можно задать также с помощью следующей таблицы: <table><tr><th>Результат эксперимента</th><th>Значение X</th></tr><tr><td>u_1 — выпал «герб»</td><td>1</td></tr><tr><td>u_2 — выпало «число»</td><td>0</td></tr></table>
Закон распределения случайной величины	
Закон распределения каждой случайной величины является функцией, область определения которой — все значения случайной величины. Поэтому **законом распределения случайной величины** X *называют функцию, которая каждому значению x случайной величины X ставит в соответствие число $P\ (X = x)$ — вероятность события, «случайная величина X приняла значение x»*	Закон распределения рассмотренной выше случайной величины задается таблицей: <table><tr><td>X</td><td>1</td><td>0</td></tr><tr><td>P</td><td>$\frac{1}{2}$</td><td>$\frac{1}{2}$</td></tr></table>

СТАТИСТИЧЕСКИЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ РЯДОВ ДАННЫХ

Определение	Пример
Ранжирование ряда данных	
Под **ранжированием ряда данных** понимают расположение элементов этого ряда в порядке возрастания (имеется в виду, что *каждое следующее число или больше, или не меньше предыдущего*)	Если ряд данных выборки имеет вид 5, 3, 7, 4, 6, 4, 6, 9, 4, то после ранжирования он превращается в ряд 3, 4, 4, 4, 5, 6, 6, 7, 9 (1)
Размах выборки (R)	
Размах выборки — это *разность между наибольшим и наименьшим значениями* величины в выборке	Для ряда (1) размах выборки: $R = 9 - 3 = 6$

Мода (*Mo*)

Мода — это *значение* **элемента выборки**, *встречающееся чаще остальных*

В ряду (1) значение 4 встречается чаще всего, итак, $Mo = 4$

Медиана (*Me*)

Медиана — это так называемое *серединное значение упорядоченного ряда значений*:
- если количество чисел в ряду *нечетное*, то медиана — это число, *записанное посередине*;
- если количество чисел в ряду *четное*, то медиана — это *среднее арифметическое двух чисел, стоящих посередине*

Для ряда (1), в котором 9 членов, медиана — это среднее (то есть пятое) число 5:

$$Me = 5.$$

Если рассмотреть ряд

$$3,\ 3,\ 4,\ 4,\ 4,\ 5,\ 6,\ 6,\ 7,\ 9,$$

в котором 10 членов, то медиана — это среднее арифметическое пятого и шестого членов: $Me = \frac{4+5}{2} = 4{,}5$

Среднее значение $(\overline{X})$ выборки

Средним значением выборки называют *среднее арифметическое всех чисел ряда данных выборки.*

Если в ряду данных записаны значения $x_1, x_2, \ldots, x_n$ (среди которых могут быть и одинаковые), то

$$\overline{X} = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}. \qquad (2)$$

Если известно, что в ряду данных различные значения $x_1, x_2, \ldots, x_k$ встречаются соответственно с частотами $m_1, m_2, \ldots, m_k$ (тогда $\sum M = n$), то среднее арифметическое можно вычислить по формуле

$$\overline{X} = \frac{x_1 m_1 + x_2 m_2 + \ldots + x_k m_k}{n} \qquad (3)$$

Пусть ряд данных задан таблицей распределения его различных значений по частотам M:

X	2	4	5	7
M	3	1	2	2

$$\sum M = n = 8.$$

Тогда по формуле (2)

$$\overline{X} = \frac{2+2+2+4+5+5+7+7}{8} = \frac{34}{8} = 4{,}25$$

или по другой формуле (3)

$$\overline{X} = \frac{2\cdot 3 + 4\cdot 1 + 5\cdot 2 + 7\cdot 2}{8} = \frac{34}{8} = 4{,}25$$

Таблица 89

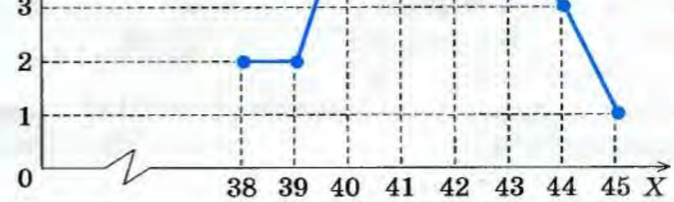
ПОНЯТИЕ ПОЛИГОНА ЧАСТОТ

*Распределение случайных величин можно **задавать и иллюстрировать графически**.*
Пусть случайная величина X — размер обуви 30 мальчиков 11 класса одной из школ — имеет распределение по частотам, данное в таблице:

X	38	39	40	41	42	43	44	45
M	2	2	5	7	6	4	3	1

Отметим на координатной плоскости точки с координатами (x_1, m_1), (x_2, m_2), ..., (x_8, m_8), соединим их последовательно отрезками и получим ломаную линию — полигон частот.

Определение. ***Полигоном частот*** **называют ломаную, отрезки которой последовательно соединяют точки с координатами (x_1, m_1), (x_2, m_2), ..., (x_k, m_k), где x_i — значения случайной величины, m_i — соответствующие им частоты**



КОМПЛЕКСНЫЕ ЧИСЛА

Определение. ***Комплексными числами*** **называют выражения вида $a + bi$, где a и b — действительные числа ($a \in R$, $b \in R$), i — некоторое (недействительное) число, квадрат которого равен -1: $i^2 = -1$**

$z = a + bi$ — комплексное число (в алгебраической форме),
где a — действительная часть комплексного числа (также обозначают: $a = Re\ z$);
bi — мнимая часть комплексного числа;
b — коэффициент при мнимой части (также обозначают: $b = Im\ z$);
i — мнимая единица

Комплексное число $a + 0i$ отождествляют с действительным числом a
$a = a + 0i$, $a \in R$, в частности $0 = 0 + 0i$

Числа $z = a + bi$ и $\bar{z} = a - bi$ называют *сопряженными комплексными числами*

Равенство комплексных чисел

$$a+bi=c+di \Leftrightarrow \begin{cases} a=c, \\ b=d \end{cases}$$

Два комплексных числа называют равными, если равны их действительные части и коэффициенты при мнимых частях

Понятия «больше» и «меньше» для комплексных чисел не вводятся

Действия над комплексными числами (в алгебраической форме)

Ориентир	Пример	Определение
Арифметические действия (сложение, вычитание, умножение и деление) над комплексными числами выполняются как действия над обыкновенными буквенными выражениями (одночленами и двучленами), но с учетом того, что $i^2 = -1$	**Сложение**	
	$(2 + 7i) + (5 - 3i) = 2 + 5 + 7i - 3i = 7 + 4i$	$(a + bi) + (c + di) = (a + c) + (b + d)\,i$
	Вычитание	
	$(7 + 4i) - (5 - 3i) = 7 - 5 + 4i + 3i = 2 + 7i$ (причем $(2 + 7i) + (5 - 3i) = 7 + 4i$)	***Разностью двух комплексных чисел*** $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$ называют такое комплексное число $z_3 = x + yi$, которое в сумме з z_2 дает z_1. (Из определения следует, что $z_1 - z_2 = (a - c) + (b - d)\,i$)
	Умножение	
	$(2 + 3i)\cdot(7 + 4i) = 14 + 8i + 21i + 12i^2 =$ (заменяем i^2 на -1) $= 2 + 29i$	$(a + bi)(c + di) = (ac - bd) + (ad + bc)\,i$
	Деление	
Выполняя деление комплексных чисел, удобно сначала умножить числитель и знаменатель на число, сопряженное знаменателю	$\frac{2+29i}{2+3i} = \frac{(2+29i)(2-3i)}{(2+3i)(2-3i)} = \frac{4-6i+58i-87i^2}{4-9i^2} = \frac{4+52i+87}{4+9} = \frac{91+52i}{13} = 7+4i$ (причем $(7 + 4i)(2 + 3i) = 2 + 29i$ — см. выше)	***Частным от деления двух комплексных чисел*** $z_1 = a + bi$ и $z_2 = c + di$ ($z_2 \neq 0$) называют такое комплексное число $z_3 = x + yi$, которое при умножении на z_2 дает z_1. (Из определения следует, что $\frac{z_1}{z_2} = \frac{a+bi}{c+di} = \frac{ac+bd}{c^2+d^2} + \frac{bc-ad}{c^2+d^2}i.$)

Нахождение степеней числа i

$i^0 = 1$	$i^1 = i$	$i^2 = -1$	$i^3 = i^2 \cdot i = -i$
$i^4 = (i^2)^2 = 1$	$i^5 = i^4 \cdot i = i$	$i^6 = i^4 \cdot i^2 = -1$	$i^7 = i^4 \cdot i^3 = -i$
$i^8 = (i^4)^2 = 1$	…	…	…
…			
$i^{4k} = 1$	$i^{4k+1} = i^{4k} \cdot i = i$	$i^{4k+2} = i^{4k} \cdot i^2 = -1$	$i^{4k+3} = i^{4k} \cdot i^3 = -i$

Свойства сопряженных чисел

$z = a + bi$

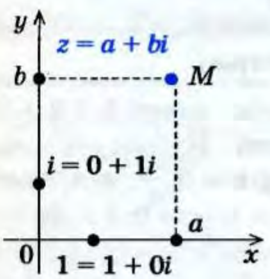
$\bar{z} = a - bi$

$$\boxed{\begin{gathered} z + \bar{z} = 2a \in \boldsymbol{R} \\ z \cdot \bar{z} = a^2 - b^2 i^2 = a^2 + b^2 \in \boldsymbol{R} \end{gathered}}$$

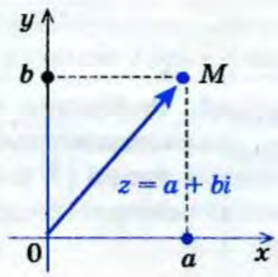
Сумма и произведение двух взаимно сопряженных комплексных чисел — число действительное

Геометрическое изображение комплексных чисел

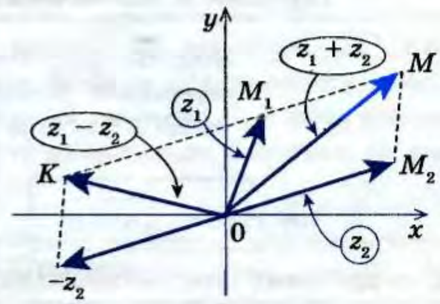
В виде точек координатной плоскости



В виде векторов на координатной плоскости



Изображение суммы и разности комплексных чисел



$$z_1 = a_1 + b_1 i \leftrightarrow \overline{OM_1}$$

$$z_2 = a_2 + b_2 i \leftrightarrow \overline{OM_2}$$

$$z_1 + z_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)i \leftrightarrow \overline{OM}$$

$$z_1 - z_2 = (a_1 - a_2) + (b_1 - b_2)i \leftrightarrow \overline{OK}$$

Геометрическое изображение комплексных чисел устанавливает взаимно однозначное соответствие

между комплексными числами и точками плоскости (называемой комплексной плоскостью).

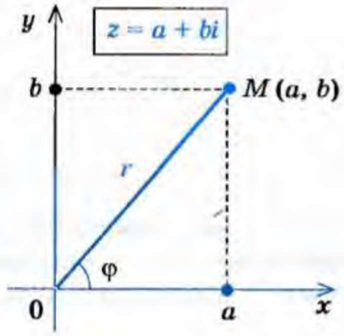
$$\boxed{z = a + bi \leftrightarrow M\ (a;\ b)}$$

между комплексными числами и радиусами-векторами (векторами, приложенными в начале координат).

$$\boxed{z = a + bi \leftrightarrow \overline{OM}}$$

где $M\ (a;\ b)$, $O\ (0;\ 0)$

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКАЯ ФОРМА КОМПЛЕКСНОГО ЧИСЛА



Положение точки M (вектора $\overline{OM}$) можно однозначно зафиксировать, задавая длину отрезка $OM = r$ и величину угла φ, который луч OM образует с положительным направлением оси Ox. В этом случае

$$r = OM = \sqrt{a^2 + b^2};\ \cos\varphi = \frac{a}{r};\ \sin\varphi = \frac{b}{r}.$$

Тогда

$$\boxed{a = r\cos\varphi \quad b = r\sin\varphi}$$

и

$$z = a + bi = r\cos\varphi + (r\sin\varphi)\, i,$$

т. е.

$$\boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi),}$$

где $r = \sqrt{a^2 + b^2}$;

$\cos\varphi = \frac{a}{r}$;

$\sin\varphi = \frac{b}{r}$

— **тригонометрическая форма комплексного числа**

Термины и обозначения

$r = \sqrt{a^2 + b^2}$ — **модуль** (или **абсолютная величина**) комплексного числа $z = a + bi$.

$$\boxed{|z| = r = \sqrt{a^2 + b^2}}$$

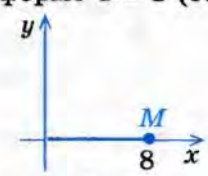
φ — **аргумент** комплексного числа z

$\boxed{\text{Arg } z = \varphi \text{ — определяется с точностью до } 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}}$

для числа 0 аргумент не определен

Примеры

1. Изобразим комплексное число $8 = 8 + 0i$ на комплексной плоскости. Из рисунка видно, что $|8| = OM = 8$, $\text{Arg } 8 = 0$, т. е. в тригонометрической форме $8 = 8(\cos 0 + i\sin 0)$.



2. $z = 1 - i$. Здесь $a = 1$, $b = -1$. Тогда

$$|z| = |1 - i| = r = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{2}.$$

$$\left.\begin{aligned} \cos\varphi &= \frac{a}{r} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\varphi &= \frac{b}{r} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}\right\} \text{Arg } z = \varphi = \frac{7\pi}{4},$$

т. е. в тригонометрической форме

$$1 - i = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = \sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)$$

Равенство комплексных чисел в тригонометрической форме

$z_1 = r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)$

$z_2 = r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)$

$$\boxed{z_1 = z_2} \Leftrightarrow \boxed{\begin{gathered} r_1 = r_2 \\ \varphi_1 = \varphi_2 \text{ (или отличаются} \\ \text{на } 2\pi k,\ k \in \mathbf{Z}) \end{gathered}}$$

Два комплексных числа, данные в тригонометрической форме, равны между собой тогда и только тогда, когда равны их модули, а аргументы или равны, или отличаются на величину, кратную 2π

ДЕЙСТВИЯ НАД КОМПЛЕКСНЫМИ ЧИСЛАМИ В ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКОЙ ФОРМЕ

$z_1 = r_1 (\cos \varphi_1 + i \sin \varphi_1)$, $z_2 = r_2 (\cos \varphi_2 + i \sin \varphi_2)$

Умножение	Деление
$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 (\cos(\varphi_1 + \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 + \varphi_2))$ *При умножении комплексных чисел их модули перемножаются, а аргументы складываются*	$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2}(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i \sin(\varphi_1 - \varphi_2))$ *При делении комплексных чисел их модули делятся, а аргументы вычитаются (модуль делимого делится на модуль делителя и из аргумента делимого вычитается аргумент делителя)*

Возведение в степень

$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$

$$\boxed{z^n = r^n (\cos n\varphi + i \sin n\varphi),\ n \in N}$$

При возведении комплексного числа в натуральную степень модуль возводится в эту степень, а аргумент умножается на показатель степени. (Формулу можно использовать и для целых отрицательных n.)

Пример

$$(1-i)^{20} = \left(\sqrt{2}\left(\cos\frac{7\pi}{4} + i\sin\frac{7\pi}{4}\right)\right)^{20} =$$

$$= \left(\sqrt{2}\right)^{20}\left(\cos\left(\frac{7\pi}{4}\cdot 20\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}\cdot 20\right)\right) =$$

$$= 2^{10}(\cos 35\pi + i\sin 35\pi) = 1024(-1 + i\cdot 0) = -1024$$

Извлечение корня n-й степени

$z = r (\cos \varphi + i \sin \varphi)$

$$\boxed{\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{r}\left(\cos\frac{\varphi + 2\pi k}{n} + i\sin\frac{\varphi + 2\pi k}{n}\right),\ k \in Z}$$

(Всего получаем n различных значений при $k = 0, 1. 2. \ldots\ldots, n - 1$.)

При извлечении корня n-й степени из комплексного числа из модуля извлекается арифметический корень n-й степени, а к аргументу прибавляется 2πk и результат делится на показатель корня

В множестве комплексных чисел знаки $\sqrt{\ }$, $\sqrt[4]{\ }$, ..., $\sqrt[2k]{\ }$ *не являются знаками только арифметических корней (как это было в множестве действительных чисел* (см. табл. 29)). *Поэтому знаком* $\sqrt[n]{z}$ *обозначаются все n значений корня при любом n (четном или нечетном)*

Примеры

1. $\sqrt{-1} = \pm i$.
2. $\sqrt{9} = \pm 3$ (только в множестве комплексных чисел!).
3. $u = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{8(\cos 0 + i\sin 0)} = \sqrt[3]{8}\cdot\left(\cos\frac{0+2\pi k}{3} + i\sin\frac{0+2\pi k}{3}\right) =$

(арифметический корень!)

$$= 2\left(\cos\frac{2\pi k}{3} + i\sin\frac{2\pi k}{3}\right),\ k \in \mathbf{Z}.$$

Имеем три различных значения $\sqrt[3]{8}$:

1) при $k = 0$ $u_0 = \sqrt[3]{8} = 2\ (\cos 0 + i \sin 0) = 2$;

2) при $k = 1$ $u_1 = \sqrt[3]{8} = 2\left(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}\right) = 2\left(-\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 + i\sqrt{3}$;

3) при $k = 2$ $u_2 = \sqrt[3]{8} = 2\left(\cos\frac{4\pi k}{3} + i\sin\frac{4\pi k}{3}\right) =$

$$= 2\left(-\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = -1 - i\sqrt{3},\ \text{т. е.}\ \sqrt[3]{8} = \left[\begin{array}{l} 2 \\ -1 + i\sqrt{3} \\ -1 - i\sqrt{3} \end{array}\right.$$

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Навчальне видання

НЕЛІН Євген Петрович

АЛГЕБРА В ТАБЛИЦЯХ

Навчальний посібник для учнів 7–11 класів

(Російською мовою)

Головний редактор *Г. Ф. Висоцька*
Редактор *Т. Є. Цента*
Комп'ютерне верстання *С. І. Северин*

Формат 60×90/8. Папір офсетний. Гарнітура шкільна.
Друк офсетний. Ум. друк. арк. 16,00.
Тираж 3000 прим. Замовлення № 470.

ТОВ ТО «Гімназія»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків, 61052 Україна
Тел.: (057) 719-17-26, 758-83-93, 719-46-80, факс (057) 758-83-93
E-mail: contact@gymnasia.com.ua
www.gymnasia.com.ua
Свідоцтво ДК № 644 від 25.10.2001 р.

Віддруковано з готових діапозитивів
у друкарні ПП «Модем»,
вул. Восьмого Березня, 31, м. Харків, 61052 Україна
Тел.: (057) 758-15-80, 758-15-90

ГІМНАЗІЯ

61052 Харьков, ул. Восьмого Марта, 31
Тел.: (057) 719-46-80, 719-17-26
факс: (057) 758-83-93
e-mail: contact@gymnasia.com.ua

9 789664 741757

Е.П.Нелин

АЛГЕБРА

в таблицах

- определения
- теоремы
- алгоритмы
- примеры

ГІМНАЗІЯ